

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 396. Band

Kuratorium:

F. Paschen	M. Planck	R. Pohl
A. Sommerfeld	M. Wien	E. Warburg

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1930 erscheinen die Bände 4, 5 und 6 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 15. April 1930

# Inhalt

	Seite
Rudolf Bechmann-Berlin, Zur Theorie der Strahlungskopplung von Kurzwellen-Antennensystemen. (Mit 10 Figuren) . . .	829
Rudolf Ladenburg-Berlin-Dahlem, Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge bei der sogenannten elektrischen Gasreinigung: I. Teil. Über die maximale Aufladung von Schwebe- teilchen (z. T. gemeinsam mit H. Sachsse.) (Mit 11 Figuren)	863
H. F. Hertlein-Freiburg i. Br., Die Struktur der Kapillarschicht von Dipolflässigkeiten. (Mit 5 Figuren) . . . . .	898
Carlfriedrich Weiß-Gießen, Über die Abhängigkeit der Linienabsorption von der Helligkeit im Lichtbogen. (Mit 3 Figuren)	923
Nikolaus Vermes-Budapest, Eine allgemeine Behandlung der Verstärkung und Gleichrichtung von Elektronenröhren. (Mit 5 Figuren) . . . . .	943
W. Weizel und M. Kulp, Über die Bandensysteme der Alkalidämpfe. (Mit 2 Figuren) . . . . .	971

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die **Annalen** zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.



C  
C  
n  
s  
l  
n  
n  
z  
L  
d  
l  
(  
g  
S  
a  
T  
V  
n  
li  
in  
fo  
—



# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1930, BAND 4, HEFT 7

## *Zur Theorie der Strahlungskopplung von Kurzwellen-Antennensystemen*

*Von Rudolf Bechmann*

(Mit 10 Figuren)

### Einleitung

Im folgenden wird das Problem der Strahlungskopplung eines Systems, das aus einer beliebigen Anzahl von parallelen Leitern besteht, betrachtet. Ein Teil der Leiter wird durch eine äußere elektromotorische Kraft erregt, während die übrigen nicht gespeist, sondern nur durch Strahlungskopplung erregt sind. Derartige Anordnungen werden heute in der Kurzwellen-Nachrichtentechnik zur Bündelung der Strahlungsenergie benutzt. Es gibt eine größere Anzahl theoretischer und experimenteller Untersuchungen über dieses Gebiet (vgl. Literaturzusammenstellung am Schluß). Vor allem ist eine Arbeit von M. Abraham<sup>1)</sup> hervorzuheben. Abraham geht in ihr von der Voraussetzung aus, daß die Antennen durch elektrische Dipole darstellbar sind, d. h. es werden nur solche Antennen (Vertikalantennen) betrachtet, deren Endkapazitäten wesentlich größer sind als die Kapazitäten der vertikalen Teile. Die Stromstärke längs der vertikalen Leiter wird also als konstant angenommen.

Bei Kurzwellenantennen (den sogenannten Dipolen der Technik) ist die Länge der Leiter von der Größenordnung der Wellenlänge. Die Stromverteilung längs der Leiter ist also nicht konstant. In Entfernungen, die groß gegen die Wellenlänge sind, läßt sich auch in diesem Falle das Strahlungsfeld in erster Näherung durch ein Dipolfeld darstellen. In Entfernungen von der Größenordnung der Wellenlänge läßt sich

1) M. Abraham, Archiv für Elektrotechnik 8. S. 93. 1919.

das Strahlungsfeld aber durch den einfachen Dipolansatz nicht mehr beschreiben. Dieser Ansatz ist daher zu erweitern. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Die eine besteht darin, daß die Strahlung des Leiters durch ein Multipolfeld beschrieben wird. Diese Darstellungsweise läßt sich streng durchführen; denn jedes beliebige System von elektrischen Strömen ist hinsichtlich seiner Wechselwirkung mit anderen Systemen äquivalent einer Anzahl von Multipolen verschiedener Ordnung, die in einem Punkt des Systems konzentriert sind. Der Hertzsche Vektor ist für den Fall des linearen Leiters in eine Reihe von Multipolen zu entwickeln; die sich daraus ergebende Reihe für die elektrische Feldstärke läßt sich unter gewissen Bedingungen summieren. So ergibt sich eine geschlossene Darstellung für die von einem schwingenden Leiter erzeugte elektrische Feldstärke. Diese Entwicklung werde nicht weiter verfolgt, sondern es wird der zweite Weg der Lösung des Problems der Strahlungskopplung beschritten. Im folgenden wird ausgegangen von der Schwingungsgleichung für einen geradlinigen Leiter. Entsprechend der Anzahl  $N$  der Leiter erhält man ein System von  $N$  Differentialgleichungen. Aus ihrer Lösung ergeben sich die Amplituden und Phasen der einzelnen schwingenden Elemente. Die Wechselwirkung zwischen den Leitern, sowie die auf den Leiter wirkende Selbstkraft und die daraus folgende Strahlungsdämpfung dagegen erhält man aus der Berechnung des Strahlungspotentials, des Hertzschen Vektors, gemäß der durch die Lösung dieses Gleichungssystems gegebenen Stromverteilung. Dies führt zu einem einfachen Ausdruck für die von einem linearen Leiter erzeugte elektrische Feldstärke. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert insbesondere eine einfache Methode zur Berechnung der Strahlungswiderstände von beliebigen Antennenkombinationen.

#### § 1. Die erzwungenen elektrischen Schwingungen eines geradlinigen Leiters von endlicher Länge

Wir betrachten zunächst die Schwingungsgleichung für einen linearen zylindrischen Leiter. Dieser habe die endliche Länge  $l$  und den im Vergleich zur Länge sehr kleinen Radius  $\varrho$ , seine elektrische Leitfähigkeit besitze den endlichen Wert  $\sigma$ . Wir denken uns ihn in die  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems

gelegt. Seine Endpunkte seien  $z = 0$  und  $z = l$ . Es ergibt sich der transversale Anteil des elektrischen Momentes  $p_z$  des Leiters als Funktion der Zeit und der Lagekoordinate  $z$ , wenn  $\mathcal{E}(z, t)$  das den Leiter erregende elektrische Feld bedeutet und die Dämpfung  $\mathcal{D}$  als eine der ersten Ableitung nach der Zeit proportionale Reibungskraft angesetzt wird als Lösung der Differentialgleichung

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 p_z}{\partial t^2} + \mathcal{D} \frac{\partial p_z}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} = e^2 \mathcal{E}_z;$$

dabei bedeutet  $m$  die elektromagnetische Masse,  $e$  die elektrische Ladungsdichte pro Längeneinheit, ferner ist  $\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Randbedingungen von Gl. (1) sind gegeben durch die Bedingung des Verschwindens von  $p_z$  an den Enden des Leiters. Die Anfangsbedingungen fallen fort, da wir nur stationäre Lösungen von Gl. (1) betrachten wollen. Die den Leiter erregende Feldstärke  $\mathcal{E}$  schwinde harmonisch mit der Frequenz  $\nu$ . Wir machen für die erregende Feldstärke einerseits und andererseits für das erzwungene elektrische Moment den Ansatz

$$(2) \quad \mathcal{E}_z = E_z e^{-i\nu t}; \quad p_z = p_z e^{-i\nu t}.$$

Sind  $\varphi_n(z)$  die Eigenfunktionen der homogenen Gleichung (1), d. h. der Gleichung (1) für  $\mathcal{D} = 0$ ,  $E_z = 0$ , die den vorgeschriebenen Randbedingungen genügen, somit an den beiden Enden des Grundgebietes von (1) verschwinden, so läßt sich das erzwungene Moment des Leiters in komplexer Schreibweise darstellen durch eine Reihe von der Form

$$(3) \quad p_z = \sum_n \frac{1}{N\varphi_n} \frac{\delta_n U_n \varphi_n(z) e^{-i\nu t}}{\nu_n^2 - \nu^2 - i\nu\nu_n'} \cdot 1)$$

Dabei bedeuten  $\nu_n$  die Frequenzen der Eigenschwingungen, ferner

$$(4) \quad \nu_n' = \frac{\mathcal{D}}{m} \quad \text{und} \quad \delta_n = \frac{e^2}{m}$$

1)  $N\varphi$  bedeutet Norm von  $\varphi$ , d. h.  $N\varphi_n = \int_0^l \varphi_n^2 dz$ .

die Dämpfungsfrequenzen bzw. die Empfindlichkeiten, die beide frequenzabhängig sein mögen, ferner

$$(5) \quad U_n = \int_i E_z \varphi_n(z) dz$$

die über den Lösungsbereich in bezug auf die Eigenfunktionen  $\varphi_n$  gebildeten Entwicklungskoeffizienten von  $E$ . Für das betrachtete Grundgebiet ( $z = 0, l$ ) lauten die Eigenfunktionen der homogenen Gleichung (1)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(z) = \sin(k_n z) \\ k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} = \frac{\nu_n}{c} \\ \lambda_n = \frac{2l}{n}, \end{array} \right.$$

und

$$(6a) \quad N \varphi_n = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} z dz = \frac{l}{2}$$

Wir setzen voraus, daß die in das System eingeführte Dämpfung  $\mathcal{D}$  eine reine Strahlungsdämpfung darstellt, so daß das System keine andere Energie als Strahlungsenergie abgibt. Die Dämpfung ist also durch den Strahlungswiderstand bedingt, der nach Planck<sup>1)</sup> auf eine Reibungskraft in Analogie zur Mechanik zurückführbar ist. Die elektromagnetische Masse einerseits und diese Reibungskraft andererseits, die Strahlungsdämpfung, läßt sich durch die „Selbstkraft“  $E_z^0$ , die Resultierende der Kräfte, mit denen die verschiedenen infinitesimalen Elemente des Systems aufeinanderwirken, darstellen. Für die durch Gleichung (1) dargestellte Schwingung werden wir diese Selbstkraft in § 3 bzw. § 4 berechnen; indem wir die sich dort ergebenden Ausdrücke, Gl. (38) bzw. Gl. (56a), vorwegnehmen, setzt sich der Entwicklungskoeffizient der Selbstkraft für die durch Gl. (1) definierten elektrischen Schwingungen zusammen aus zwei Beiträgen, die die Strahlungsdämpfung und Empfindlichkeit in Gl. (1) liefern. Es gilt nach Gl. (5)

$$\int_i E_z^{0n} \varphi_n dz = U_n^0 = i k U_n^{01} - \frac{\nu_n^2 - \nu^2}{c^2} U_n^{02}.$$

1) M. Planck, Berl. Berichte S. 470. 1902; S. 480. 1903; S. 740. 1904; S. 382. 1905.

Durch Einführung dieses Ausdruckes in Gl. (3) ergibt sich einerseits für die Dämpfungsfrequenz

$$(7) \quad \nu' = \frac{\delta_n}{N q_n} \frac{k U_n^{01}}{\nu},$$

andererseits für die Empfindlichkeit des betrachteten Systems

$$(8) \quad \delta_n = \frac{N q_n \cdot c^2}{R e (U_n^{02})}.$$

Für das elektrische Moment erhält man schließlich aus (3) durch Einführung der Eigenfunktionen nach (6) und Berücksichtigung von (7) und (8)

$$(9) \quad p_z = \sum_n \frac{c^2}{R e (U_n^2)} \cdot \frac{U_n q_n(z) e^{-i \nu t}}{\nu_n^2 - \nu^2 - \frac{i \nu c U_n^{01}}{R e (U_n^{02})}}.$$

Wir gehen noch über zu der Darstellung der Stromverteilung auf dem Leiter. Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Moment  $p$  und dem Strom  $J$  ist vermittelt durch die Beziehung

$$(10) \quad J = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Für die Stromverteilung auf dem Leiter ergibt sich schließlich aus Gl. (9) unter Berücksichtigung von (10)

$$(11) \quad J = \sum_n \frac{-i \nu c}{R e (U_n^2)} \cdot \frac{U_n \sin(k_n z) e^{-i \nu t}}{\nu_n^2 - \nu^2 - i \frac{\nu c U_n^{01}}{R e (U_n^{02})}}.$$

Damit ist die Stromverteilung auf dem Leiter bestimmt, sofern die Koeffizienten  $U_n$  bekannt sind.

## § 2. Ansatz für das Strahlungssystem

Wir betrachten ein System von  $N$  parallelen gleichartigen Strahlern. Ein Teil davon sei irgendwie durch eine elektromotorische Kraft gespeist, der Rest nur durch Strahlungskopplung erregt. Die Länge des  $s$ -ten Leiters sei  $l_s$ , der darin fließende Strom  $J_s$ . Die ihn erregende elektromotorische Kraft, die auf ihn wirken muß, um den Beharrungszustand aufrechtzuerhalten, sei  $V_s$ . Sie habe die Frequenz  $\nu$ . Die auf den  $s$ -ten Strahler vom  $r$ -ten Strahler herrührende Kopplungskraft

sei  $E_{rs}$ . Außerdem besteht für den  $s$ -ten Leiter, entsprechend der ihn erregenden elektromotorischen Kraft, eine Anregungsbedingung

$$\left( \frac{\partial J_s}{\partial z_s} \right) = -C \frac{\partial V_s}{\partial t}.$$

Diese, an einem Rand des Leiters definierte Anregung läßt sich in das Innere des Leiters analytisch fortsetzen und durch ein weiteres Glied  $E_{ss}$  berücksichtigen. Insgesamt wirken dann auf den  $s$ -ten Strahler die elektromotorischen Kräfte

$$(12) \quad E_s = \sum_r E_{rs}.$$

Das Glied  $E_{ss}$  in (12) sei als dieses Anregungsglied betrachtet. Wie im § 1 seien Ohmsche Widerstände der Leiter vernachlässigt.

Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem  $xyz$  ein, die Strahler seien sämtlich zur  $z$ -Achse parallel angeordnet. Ein Punkt des  $s$ -ten Leiters habe die Koordinaten  $x_s, y_s, z_s$ . Die Länge des  $s$ -ten Leiters sei  $l_s$ . Dann sind seine Eigenfunktionen

$$(13) \quad \varphi_n^s(z_s) = \sin(k_n^s z_s) \quad k_n^s = \frac{\pi n}{l_s} = \frac{x_n^s}{c};$$

ferner gilt

$$(13a) \quad N \varphi_n^s = \frac{l_s}{2}.$$

Die Stromamplitude der  $n$ -ten Eigenschwingung des  $s$ -ten Leiters sei  $A_s^n$ , der Kopplungskoeffizient, der die Wirkung der  $n$ -ten Eigenschwingung des  $r$ -ten Leiters auf den  $s$ -ten Leiter vermittelt, sei  $E_{rs}^n$ . Dieser ist, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, proportional der Stromamplitude  $A_r^n$ . Die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten  $U$  berechnen sich dann aus

$$(14) \quad U_{rs}^{nm} = \int_{l_s} E_{rs}^n \varphi_s^m(z_s) dz_s.$$

Außerdem führen wir gemäß der Anregungsbedingung noch die Koeffizienten

$$(14a) \quad V_s^n = U_{ss}^n = \int_{l_s} E_{ss} \varphi_s^n(z_s) dz_s$$

ein.

Für das Gesamtsystem der  $N$  Leiter erhält man schließlich nach (11) das unendliche Gleichungssystem

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & ((v_s^n)^2 - v^2 - i v v_s^n) A_s^n \\ & = -i \frac{v}{c} \frac{\delta_s}{N \varphi_n} \left( \sum_{r=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} A_r^m U_{rs}^m + V_s^n \right) \\ & s = 1 \dots N \quad n = 1 \dots \infty, \end{aligned} \right.$$

dessen Lösung die Stromamplituden und Phasen liefern.

Für das Folgende beschränken wir uns auf die Grundschwingungen der Leiter, wobei wir voraussetzen, daß die Längen der Leiter nicht wesentlich verschieden voneinander sind. Wir werden daher nur jeweils das erste Glied in der Entwicklung (15) berücksichtigen. Demzufolge erhalten wir aus (15) das lineare Gleichungssystem unter Weglassung des die Ordnung der Schwingungen angegebenden Index

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & (v_s^2 - v^2 - i v v_s') A_s \\ & + i \frac{v}{c} \frac{\delta_s}{N \varphi_s} \left( \sum_{r=1}^N A_r U_{rs} + V_{ss} \right) = 0 \\ & s = 1, 2 \dots N, \end{aligned} \right.$$

oder anders geschrieben

$$(16a) \quad \left\{ \begin{aligned} & (v_s^2 - v^2 - i v v_s') A_s \\ & + i \frac{v}{c} \frac{\delta_s}{N \varphi_s} \sum_{r=1}^N A_r U_{rs} = -i \frac{v}{c} \frac{\delta_s}{N \varphi_s} V_{ss} \\ & s = 1 \dots N. \end{aligned} \right.$$

Die gesuchten  $A_s$  ergeben sich daraus in komplexer Darstellung aus den Determinanten

$$(17) \quad A_s = \frac{d_s}{\Delta}.$$

Dabei bedeutet

$$(18) \quad \Delta = \begin{vmatrix} v_1^2 - v^2 - i v v_1' & i \frac{v}{c} \frac{\delta_1}{N \varphi_1} U_{21} & \dots & i \frac{v}{c} \frac{\delta_1}{N \varphi_1} U_{N1} \\ i \frac{v}{c} \frac{\delta_n}{N \varphi_n} U_{1n} & v_n^2 - v^2 - i v v_n' & & i \frac{v}{c} \frac{\delta_n}{N \varphi_n} U_{Nn} \\ & & & \\ i \frac{v}{c} \frac{\delta_N}{N \varphi_N} U_{1N} & & & v_N^2 - v^2 - i v v_N' \end{vmatrix}.$$

Die  $A_s$  gehen aus der Determinante (18) durch Ersetzen der  $s$ -ten Spalte durch die rechte Seite von (16a) hervor. Die Lösung (17) bedeutet ein System von Schwingungen, deren Amplituden sich als absolute Beträge von (17) darstellen

$$(19) \quad |A_s| = \left| \frac{d_s}{d} \right|$$

und deren Phasenwinkel  $\chi_s$  ( $e^{-i(\nu t - \chi_s)}$ ) sich ergeben zu

$$(20) \quad \cos \chi_s = \frac{\Re e \left( \frac{d_s}{d} \right)}{\left| \frac{d_s}{d} \right|}; \quad \sin \chi_s = \frac{J_m \left( \frac{d_s}{d} \right)}{\left| \frac{d_s}{d} \right|}.$$

Auf die Diskussion dieser Lösung sei in § 5 und folgenden eingegangen, zunächst werden in dem nächsten Paragraphen die gegenseitig elektrischen Kräfte berechnet.

### § 3. Berechnung des von einem linearen Strahler erzeugten elektrischen Feldes

Wir gehen aus von dem allgemeinen Ansatz für die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , der sich aus dem Hertzschen Vektor  $\mathfrak{Z}$  ergibt. Es gilt für die Feldstärke  $\mathfrak{E}$

$$(21) \quad \mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}.$$

Der Hertzsche Vektor bestimmt sich aus der Gleichung

$$(22) \quad \mathfrak{Z} = \int \frac{dv}{r} \bar{\mathfrak{p}},$$

wobei  $dv$  ein Element des Leiters bedeutet, der Strich über dem Vektor die Retardierung angibt, d. h. für die Zeit  $t$  ist die retardierte Zeit  $t - \frac{r}{c}$  zu setzen. Für  $\mathfrak{p}$  machen wir entsprechend Gl. (9) den Ansatz, daß es sich längs der betrachteten Leiter multiplikativ zusammensetzt aus einem Term  $\mathfrak{p}_r$ , der den transversalen Anteil der räumlichen Verteilung des elektrischen Momentes beschreibt, und einem Faktor  $f$ , der den zeitlichen Anteil bestimmt. Ferner haben wir der Verteilung des Momentes über den Querschnitt des Leiters Rechnung zu tragen. Wir führen die Verteilungsfunktion  $u(\rho)$  ein und er-



halten für das elektrische Moment, wenn die Achse des Leiters mit der  $z_0$ -Achse des Koordinatensystems zusammenfällt

$$(23) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_z u(\varrho) = p_z(z_0) f(t) \cdot u(\varrho).$$

Die für den Querschnitt definierte Verteilungsfunktion  $u(\varrho)$  ist unter der Annahme eines zylindrischen Leiters mit großer Leitfähigkeit  $\sigma$  in bekannter Weise gegeben durch den Ausdruck<sup>1)</sup>

$$(24) \quad u = C_0 J_0(k_e \cdot \varrho),$$

dabei bedeutet  $J_0(x)$  die Besselsche Funktion nullter Ordnung,  $C_0$  eine Konstante, auf die nicht näher eingegangen sei, ferner ist  $k_e = \frac{s\mu\nu^2 + i\mu\sigma\nu}{c^2}$ . Die Annahme großer Werte für die Leitfähigkeit wurde im vorigen stets gemacht, entsprechend der Voraussetzung, daß die Ohmschen Widerstände vernachlässigbar seien.

Es seien noch einige Beziehungen für das Rechnen mit retardierten Potentialen angegeben, von denen wir Gebrauch machen werden.<sup>2)</sup> Es ist  $\partial \bar{U}/\partial t$ ,  $\partial \bar{U}/\partial x$  zu unterscheiden von  $\overline{\partial U/\partial t}$  und  $\overline{\partial U/\partial x}$ . Ersteres bedeutet, daß man an Stelle von  $t$  zuerst  $t - \frac{r}{c}$  und dann die Differentiation ausführen soll, letzteres bedeutet eine Differentiation nach  $t$  bzw.  $x$  und nachherige Ersetzung von  $t$  durch  $t - \frac{r}{c}$ . Es gilt

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial U}{\partial t}} \\ \text{grad } \bar{U} = \overline{\text{grad } U} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \text{ grad } r \\ \text{div } \frac{\bar{\mathfrak{A}}}{r} = \overline{\frac{\text{div } \mathfrak{A}}{r}} + \left( \bar{\mathfrak{A}}, \text{grad } \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}}{\partial t}, \frac{\text{grad } r}{r} \right). \end{array} \right.$$

Die von dem linearen Leiter erzeugte elektrische Feldstärke im Aufpunkt  $P$  wird nach (21) unter Berücksichtigung von (22)

$$(26) \quad \mathfrak{E} = \text{grad}_P \text{div}_P \int \frac{dv}{r} \bar{\mathfrak{p}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{dv}{r} \bar{\mathfrak{p}}.$$

1) Riemann-Weber, Braunschweig, 1927, Bd. 2. S. 511.

2) Vgl. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1921.

Durch Ausführung der Operation  $\text{div}$  nach (24) erhält man daraus

$$(26a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = \text{grad}_P \int_i dv \left\{ \left( \bar{p}, \text{grad}_{\bar{P}} \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c} \left( \bar{p} \frac{\text{grad } r}{r} \right) \right\} \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{dv}{r} \bar{p}. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nur die  $z$ -Komponente berechnen, die allein für das Folgende von Bedeutung ist. Wir benutzen kartesische Koordinaten bzw. für den Leiter selbst Zylinderkoordinaten  $z_0, \varrho$ . Die Grenzen des Leiters von der Länge  $l$  seien  $z_{01}$  und  $z_{02}$ . Der Quellpunkt  $Q$  hat die Koordinaten  $x_0 y_0 z_0$ , der Aufpunkt  $P$  hat die Koordinaten  $xyz$ . Für das Element des Leiters gilt  $dv = 2\pi \varrho d\varrho dz_0$ . Wir nehmen die Integration nach  $\varrho$ , d. h. die Mittelung über den Leiterquerschnitt vorweg. Nach Gl. (24) gilt

$$(27) \quad 2\pi \int u(\varrho) \varrho d\varrho = 2\pi C_0 \int_0^{\varrho} J_0(k_{\varrho} \varrho) \varrho d\varrho = \frac{2\pi C_0}{k_{\varrho}} \varrho J_1(k_{\varrho} \varrho).$$

Dieser Ausdruck gibt die Amplitude von  $\bar{p}$ , die in der folgenden Ableitung unterdrückt werde. Wir haben also für die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes nach Gl. (26a)

$$(28) \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial}{\partial z} \int_i dz_0 \left\{ \bar{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c} \frac{\bar{p}_z}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \right\} - \frac{1}{c^2} \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{p}_z.$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß, auf  $r$  angewandt,  $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z_0}$  ist. Ferner berücksichtigen wir, entsprechend Gl. (23), den Ansatz für das elektrische Moment. Der erste Term in Gl. (28) läßt sich wie folgt umformen:

$$(29) \quad \frac{\partial}{\partial z} \int_i dz_0 \bar{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = \int_i dz_0 p_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ \bar{p}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich für Gl. (29):

$$(30) \quad \left[ \bar{p}_z \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{z_{01}}^{z_{02}} - \int_i dz_0 \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Das zweite Glied in Gl. (30) formen wir nochmals mittels partieller Integration um. Es gilt:

$$(30a) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_i dz_0 \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \\ & = - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} + \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0^2} - \frac{1}{c} \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0 \partial t} \frac{\partial r}{\partial z_0} \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten also für den ersten Term von (28):

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \bar{p}_z \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{z_{01}}^{z_{02}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} \\ & + \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0^2} - \frac{1}{c} \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0 \partial t} \frac{\partial r}{\partial z_0} \end{aligned} \right.$$

Den zweiten Term in (28) formen wir ebenfalls um; es ist

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{1}{c} \int_i dz_0 p_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z_0} \right) \\ & = - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}_z}{r} \frac{\partial r}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} + \frac{1}{c} \int_i \frac{dz_0}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0 \partial t} \frac{\partial r}{\partial z_0} \end{aligned} \right.$$

Somit erhalten wir schließlich für (28) den Ausdruck

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{E}_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} + \bar{p}_z \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}_z}{r} \frac{\partial r}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} \\ & + \int_i \frac{dz_0}{r} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial t^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für das von einem geradlinigen beliebig schwingenden Leiter erzeugte elektrische Feld. Gl. (33) gilt für eine beliebige Verteilung des elektrischen Momentes längs des Leiters. Sie gibt insbesondere das Feld von Strahlern, deren Enden durch Kapazitäten und Selbstinduktionen beschwert sind, an dessen Enden der Strom von Null verschieden ist. In dem § 1 und § 2 betrachteten Fall von Schwingungen, für deren Ränder die elektrischen Ströme jedoch Null sind, verschwinden 2 Glieder in Gl. (33). Für diesen speziellen Fall ergibt sich also

$$(34) \quad \mathcal{E}_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z_0} \Big|_{z_{01}}^{z_{02}} + \int_i \frac{dz_0}{r} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial z_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_z}{\partial t^2} \right\}.$$

Der erste Term des Ausdruckes Gl. (34) wurde von A. Pistoljors<sup>1)</sup> früher angegeben.

<sup>1)</sup> A. Pistoljors, Proc. J. R. E. 17. 562. 1929.

Wir führen nun einen Ansatz für das elektrische Moment ein und setzen entsprechend der Lösung von (9) für die Verteilung des elektrischen Momentes längs des Leiters

$$(35) \quad p_z = P \sin(k_0 z_0) e^{-i\nu t}$$

bzw. durch Einführung der Stromverteilung nach (10), wenn  $A$  die Stromamplitude bedeutet

$$(35a) \quad p_z = \frac{iA}{k} \sin(k_0 z_0) e^{-i\nu t}.$$

Die Amplitude des Momentes  $P$  bzw. des Stromes  $A$  ist der durch Gl. (27) bestimmte Mittelwert über den Leiterquerschnitt. Dadurch erhält man für (34)

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= -i \frac{A}{r} \frac{k_0}{k} \cos(k_0 z_0) e^{i(kr - \nu t)} \Big|_{z_0}^{z_0} \\ &\quad - i \frac{A}{k} (k_0^2 - k^2) e^{-i\nu t} \int_i \frac{dz_0}{r} e^{ikr} \sin k_0 z_0. \end{aligned} \right.$$

Setzt man noch

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{01})^2} \quad \text{und} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{02})^2},$$

so ergibt sich schließlich für (36)

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= E_z e^{-i\nu t} = -i A e^{-i\nu t} \frac{k_0}{k} \left\{ \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos(k_0 z_{02}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos k_0 z_{01} \right\} - i \frac{A}{k} (k_0^2 - k^2) e^{-i\nu t} \int_i \frac{dz_0}{r} e^{ikr} \sin k_0 z_0. \end{aligned} \right.$$

Es sei noch für das Folgende

$$(38a) \quad E_z^1 = -i \frac{k_0}{k} \left\{ \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos k_0 z_{02} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos k_0 z_{01} \right\};$$

$$(38b) \quad E_z^2 = \int_i \frac{dz_0}{r} e^{ikr} \sin k_0 z_0$$

gesetzt. Die Ausdrücke  $E_z^2$  werden im folgenden § 4 berechnet. Ist der Leiter durch seine Länge auf die erregende Frequenz abgestimmt, d. h. hat er eine Länge  $l = \frac{\lambda}{2}$ , so wird  $k_0 = k$ . Dadurch verschwindet das zweite Glied in (37). Gl. (37) stellt also die gesuchte raumzeitliche Verteilung der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes für Schwingungen des Leiters,

die Lösungen der Schwingungsgleichung (9) sind, dar. Bemerkenswert dabei ist, daß die Lösung in dem gerade wesentlichsten Fall, bei dem der Leiter durch seine Länge auf die erzeugende Frequenz abgestimmt ist, keine räumlichen Quadraturen enthält, sondern sich lediglich durch Umformung des Ansatzes für den Hertzschen Vektor ergibt.

#### § 4. Berechnung des Ausdrucks $E^2$ in Gleichung (38) und der Koeffizienten $U_{rs}$

Der in Gl. (38) eingeführte Ausdruck  $E^2$  und die Entwicklungskoeffizienten  $U_{rs}$  sollen im folgenden berechnet werden. Die hier in beiden Fällen auftretenden Integrale sind von ähnlicher Form. Deshalb betrachten wir zunächst allgemein den Ausdruck

$$(39) \quad \begin{cases} \Phi = \int_i \frac{dz}{r} e^{i k r} \sin k_0 z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = \sqrt{\varrho^2 + (z - \zeta)^2}. \end{cases}$$

In komplexer Darstellung läßt sich dafür schreiben

$$(40) \quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{2i} \left\{ \int_i \frac{dz}{r} e^{i(kr + k_0 z)} - \int_i \frac{dz}{r} e^{i(kr - k_0 z)} \right\} \\ = \frac{1}{2i} \{I - II\}. \end{cases}$$

Darin führen wir gemäß Fig. 1 die Substitution

$$(41) \quad r = \frac{\varrho}{\sin \vartheta}; \quad z - \zeta = \varrho \cotg \vartheta$$

ein, woraus für die Integrationsvariable

$$(42) \quad dz = -\frac{\varrho d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

folgt. Für I ergibt sich dadurch

$$(43) \quad I = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{e^{i(kr + k_0 z)}}{r} dz = -e^{i k_0 \zeta} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{e^{i \left( k \varrho \frac{1}{\sin \vartheta} + k_0 \varrho \cotg \vartheta \right)}}{\sin \vartheta} d\vartheta.$$

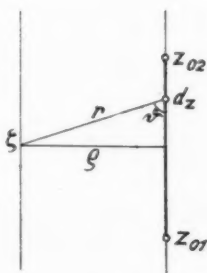


Fig. 1

Durch Übergang zu der Integrationsvariablen  $\vartheta/2$  erhält man, wenn man noch die Substitution

$$(44) \quad \cotg \frac{\vartheta}{2} = t$$

einführt

$$(45) \quad I = e^{ik_0 \zeta} \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{\frac{i}{2} \left\{ (k+k_0)t + (k-k_0)\frac{1}{t} \right\}}}{t} dt.$$

Die Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  lauten:

$$(45a) \quad \begin{cases} t_1 = \cotg \frac{\vartheta_1}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cotg^2 \vartheta_1} + \cotg \vartheta_1}{\varrho} \\ \quad = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{01} - \zeta)^2} + (z_{01} - \zeta)}{\varrho} \\ t_2 = \cotg \frac{\vartheta_2}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cotg^2 \vartheta_2} + \cotg \vartheta_2}{\varrho} \\ \quad = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{02} - \zeta)^2} + (z_{02} - \zeta)}{\varrho}. \end{cases}$$

Das Integral II behandeln wir ähnlich. Mittels der Substitution

$$(46) \quad \tg \frac{\vartheta}{2} = t'$$

erhält man

$$(47) \quad \text{II} = \int_{z_{01}}^{z_{02}} \frac{e^{i(kr - k_0 z)}}{r} dz = -e^{-ik_0 \zeta} \int_{t'_1}^{t'_2} \frac{e^{\frac{i}{2} \left\{ (k+k_0)t' + (k-k_0)\frac{1}{t'} \right\}}}{t'} dt'$$

mit den Grenzen

$$(47a) \quad \begin{cases} t'_1 = \tg \frac{\vartheta_1}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cotg^2 \vartheta_1} - \cotg \vartheta_1}{\varrho} \\ \quad = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{01} - \zeta)^2} - (z_{01} - \zeta)}{\varrho} \\ t'_2 = \tg \frac{\vartheta_2}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cotg^2 \vartheta_2} - \cotg \vartheta_2}{\varrho} \\ \quad = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{02} - \zeta)^2} - (z_{02} - \zeta)}{\varrho}. \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich für (39), wenn man noch zur Abkürzung

$$(48) \quad \frac{\varrho}{2}(k + k_0) = \alpha; \quad \frac{\varrho}{2}(k - k_0) = \beta$$

eingeführt

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2i} \{ e^{ik_0 z} (F(\alpha, \beta, t_2) - F(\alpha, \beta, t_1)) \\ &\quad + e^{-ik_0 z} (F(\alpha, \beta, t_2) - F(\alpha, \beta, t_1)) \}. \end{aligned} \right.$$

Die dabei eingeführte Funktion  $F$  ist definiert durch

$$(50) \quad F(\alpha, \beta, t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{i(\alpha t + \beta \frac{1}{t})}}{t} dt.$$

Wir setzen für (50) eine Entwicklung an. Durch eine Taylorsche Entwicklung von  $e^{\frac{i\beta}{t}}$ , die lautet

$$e^{\frac{i\beta}{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\beta}{t} \right)^n$$

erhält man für das durch (50) definierte Integral

$$(51) \quad F = \int \frac{e^{i(\alpha t + \beta \frac{1}{t})}}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} (i)^n \int \frac{e^{i\alpha t}}{t^{n+1}} dt.$$

Nun ist aber

$$(52) \quad \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^u}{u^{n+1}} du = -e^u \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(n-1-\mu)!}{n! x^{n-\mu}} \Big|_{u_1}^{u_2} + \frac{1}{n!} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^u}{u} du,$$

wodurch man für  $F$  erhält

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n \beta^n}{n!} \left\{ \frac{1}{n!} \int_{i\alpha\infty}^{i\alpha t} \frac{e^x}{x} dx \right. \\ &\quad \left. - e^x \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(n-1-\mu)!}{n! x^{n-\mu}} \right\} \Big|_{i\alpha\infty}^{i\alpha t} \end{aligned} \right.$$

Für den speziellen Fall  $\beta = 0$ , geht  $F(\alpha, \beta, t)$  über in die Integral-Exponentialfunktion  $Ei(\alpha \cdot t)$ . Es ist

$$(53a) \quad F(\alpha, 0, t) = Ei(i\alpha t).$$

Für die Integral-Exponentialfunktion gilt allgemein

$$(53b) \quad Ei(ix) = Ci(x) + iSi(x);$$

dabei bedeutet  $Ci(x)$  den Integralkosinus,  $Si(x)$  den Integralsinus. Durch (53) ist das betrachtete Integral (39) bzw. der

Ausdruck (49) bestimmt, den wir nicht mehr durch (53) ausgedrückt explizit geben werden.

Insbesondere ergibt sich aus der eben gegebenen Entwicklung der durch Gl. (38) definierte Ausdruck  $E^2$ . Man erhält für ihn aus (39) bzw. (49) und (53), wenn die Grenzen des Leiters  $z_{01} = 0$  und  $z_{02} = l$  sind

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{2i} \left\{ e^{ik_0 z} (F(\alpha, \beta, t_2) - F(\alpha, \beta, t_1)) \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik_0 z} (F(\alpha, \beta, t_2') - F(\alpha, \beta, t_1')) \right\} \end{aligned} \right.$$

mit den Argumenten

$$(54a) \quad \left\{ \begin{aligned} t_2 &= \frac{\sqrt{q^2 + (l-z)^2} + (l-z)}{q}; & t_2' &= \frac{\sqrt{q^2 + (l-z)^2} - (l-z)}{q}; \\ t_1 &= \frac{\sqrt{q^2 + z^2} - z}{q}; & t_1' &= \frac{\sqrt{q^2 + z^2} + z}{q}. \end{aligned} \right.$$

Weiterhin haben wir die durch Gl. (14) definierten Entwicklungskoeffizienten  $U_{rs}^{\text{mag}}$  zu bilden. Unter der oben gemachten Beschränkung auf die Grundschiwingung der Leiter sind diese gegeben durch den Ausdruck, wobei der auf die Ordnung der Schwingung sich beziehende Index weggelassen sei:

$$(55) \quad U_{rs} = \int_{z_s} E_{rs} \sin k_s z_s dz_s.$$

Durch Einführung des Ausdruckes für das elektrische Feld nach (37) erhält man für (55)

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs} &= -i \int_s \left\{ \frac{k_r}{k} \left( \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos(k_r z_{r2}) - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos(k_r z_{r1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k} (k_r^2 - k^2) E_r^2 \right\} \sin k_s z_s dz_s = -U_{rs}^1 - \frac{i}{k} (k_r^2 - k^2) U_{rs}^2. \end{aligned} \right.$$

Auf das elektrische Moment bezogen gilt der in § 1 anezogene Ausdruck

$$(56a) \quad U_{rs} = ik U_{rs}^1 - (k_r^2 - k^2) U_{rs}^2.$$

Dieser Ausdruck setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen, einem ersten Teil  $U_{rs}^1$  und einem zweiten Teil  $U_{rs}^2$ . Die in  $U_{rs}^1$  auftretenden Integrale sind mit der eben gegebenen Entwicklung (49) identisch. Auf die Berechnung der  $U_{rs}^2$  sei weiter unten verwiesen. Solange  $v_r - v$  klein ist, läßt sich



jedoch der durch  $U_{rs}^2$  in (56) bedingte Anteil vernachlässigen. Für den Fall  $\nu_r = \nu = 0$  verschwindet dieser Anteil und die Koeffizienten  $U_{rs}$  sind durch  $U_{rs}^1$  gegeben. Die Koeffizienten  $U_{rs}^1$  berechnen sich aus (56) bzw. (53a), wenn die Koordinaten der Leiterendpunkte  $z_{r1}; z_{s1}$  und  $z_{r2}; z_{s2}$  sind, wie folgt:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs} = \frac{-k_r}{2k} \{ & \cos k_r z_{r2} e^{ik_s z_{r2}} [F(\alpha, \beta, t_{22}) - F(\alpha, \beta, t_{12})] \\ & + \cos k_r z_{r2} e^{-ik_s z_{r2}} [F(\alpha, \beta, t'_{22}) - F(\alpha, \beta, t'_{12})] \\ & - \cos k_r z_{r1} e^{ik_s z_{r1}} [F(\alpha, \beta, t_{21}) - F(\alpha, \beta, t_{11})] \\ & - \cos k_r z_{r1} e^{-ik_s z_{r1}} [F(\alpha, \beta, t'_{21}) - F(\alpha, \beta, t'_{11})] \} \end{aligned} \right.$$

mit den Werten

$$(57a) \quad \left\{ \begin{aligned} t_{s\mu} &= \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{s\mu} - z_{r\mu})^2} + (z_{s\mu} - z_{r\mu})}{\varrho} \\ t'_{s\mu} &= \frac{\sqrt{\varrho^2 + (z_{s\mu} - z_{r\mu})^2} - (z_{s\mu} - z_{r\mu})}{\varrho} \end{aligned} \right.$$

Unter der Annahme, die dem hauptsächlichsten Fall entspricht, daß die beiden Leiter  $r$  und  $s$  je eine Länge  $l = \frac{\lambda}{2}$  besitzen, d. h.  $\beta = 0$  ist und auf gleicher Höhe angeordnet sind, die Koordinaten der Leiterendpunkte  $z_{r1} = z_{s1} = 0$  und  $z_{r2} = z_{s2} = l$  sind, erhält man aus (57) für  $U_{rs}^1$ , wenn man beachtet, daß  $\alpha = k\varrho$  ist:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs}^1 = 2Ei(ik\varrho) - Ei(ik(\sqrt{\varrho^2 + l^2} + l)) \\ \quad - Ei(ik(\sqrt{\varrho^2 + l^2} - l)). \end{aligned} \right.$$

Für (58) ergibt sich durch Einführung von  $\varrho = \lambda x$ , ferner von  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und  $l = \frac{\lambda}{2}$

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs}^1 = 2Ei(i2\pi x) - Ei(i\pi(\sqrt{(2x)^2 + 1} + 1)) \\ \quad - Ei(i\pi(\sqrt{(2x)^2 + 1} - 1)). \end{aligned} \right.$$

Ferner ergibt sich aus (57) für den Fall, daß die Leiter  $r$  und  $s$  die Länge  $\lambda/2$  besitzen, der  $r$ -te Leiter jedoch gegenüber dem  $s$ -ten um die Höhe  $h$  verschoben ist, also die Koordinaten der Leiterendpunkte  $z_{r1} = h$ ,  $z_{r2} = h + \frac{\lambda}{2}$ ,  $z_{s1} = 0$ ,  $z_{s2} = \frac{\lambda}{2}$  sind,

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs} = & -\frac{e^{ikh}}{2} \left\{ Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + \left( \frac{\lambda}{2} + h \right)^2} - \left( \frac{\lambda}{2} + h \right) \right) \right. \right. \\ & + Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + \left( \frac{\lambda}{2} - h \right)^2} + \left( \frac{\lambda}{2} - h \right) \right) \right) \\ & \left. \left. - 2 Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + h^2} - h \right) \right) \right\} \right. \\ & - \frac{e^{-ikh}}{2} \left\{ Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + \left( \frac{\lambda}{2} + h \right)^2} + \left( \frac{\lambda}{2} + h \right) \right) \right) \right. \\ & + Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + \left( \frac{\lambda}{2} - h \right)^2} - \left( \frac{\lambda}{2} - h \right) \right) \right) \\ & \left. \left. - 2 Ei \left( ik \left( \sqrt{\varrho^2 + h^2} + h \right) \right) \right\} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck  $U_{rs}$  für den speziellen Fall, daß beide Leiter senkrecht übereinander angeordnet sind, ergibt sich aus (60) für den Grenzwert  $\varrho = 0$ . Dabei ist der Grenzübergang für den reellen und imaginären Teil getrennt auszuführen. Es gilt für den Integralkosinus  $Ci(x)$  in der Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung

$$Ci(x) = C + \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

wobei  $C = 0,577$  die Eulersche Konstante bedeutet. Durch Anwendung dieser Entwicklung erhält man für den Fall  $\varrho = 0$  für den reellen Teil von (60)

$$(61a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Re e \{ U_{rs}(\varrho = 0) \} = & \frac{\cos kh}{2} \left\{ 2Ci(2kh) - Ci \left( 2k \left( h + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - Ci \left( 2k \left( h - \frac{\lambda}{2} \right) \right) + \ln \frac{h^2}{h^2 - \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2} \right\} \\ & + \frac{\sin kh}{2} \left\{ 2Si(2kh) - Si \left( 2k \left( h + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - Si \left( 2k \left( h - \frac{\lambda}{2} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

für den imaginären Teil von (60)

$$(61b) \left\{ \begin{aligned} J_m \{ U_{rs}(\varrho = 0) \} &= \frac{\cos kh}{2} \left\{ 2Si(2kh) - Si\left(2k\left(h + \frac{\lambda}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - Si\left(2k\left(h - \frac{\lambda}{2}\right)\right) \right\} \\ &- \frac{\sin kh}{2} \left\{ 2Ci(2kh) - Ci\left(2k\left(h + \frac{\lambda}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - Ci\left(2k\left(h - \frac{\lambda}{2}\right)\right) - \ln \frac{h^2}{h^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nach (7) ist die Strahlungsdämpfung definiert durch den Entwicklungskoeffizienten des Anteiles der Selbstkraft  $E^1$ , also durch

$$U_{ss} = \int_{is} E_s \sin k_s z_s dz_s.$$

Dieser Ausdruck ergibt sich unmittelbar aus (59) für den Grenzwert  $\varrho = 0$ . Der Grenzübergang ist für den reellen Teil und

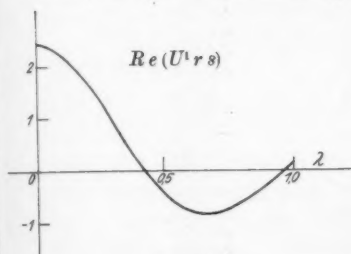


Fig. 2

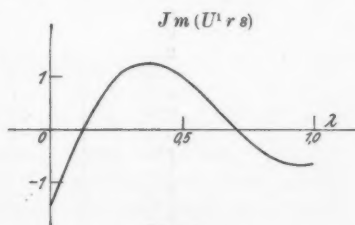


Fig. 3

imaginären Teil getrennt durchzuführen. Man erhält für den reellen Teil von (59) für  $x = 0$  unter Berücksichtigung der Entwicklung von  $Ci(x)$  in der Umgebung des Nullpunktes

$$(62) \quad \Re e(U_{ss}) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \Re e(U_{rs}) = C + \ln 2\pi - Ci(2\pi),$$

für den Grenzwert des imaginären Teiles von (59) ergibt sich

$$(63) \quad J_m(U_{ss}) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} J_m(U_{rs}) = -Si(2\pi).$$

Für das Intervall für  $x$  von 0 bis 7,5 wurde (59) mittels der Tabellen von J. W. L. Glaisher<sup>1)</sup> berechnet. Fig. 2 enthält die Darstellung von  $\Re e(U^1_{rs})$ , Fig. 3 die Darstellung von  $J_m(U^1_{rs})$ .

1) J. W. L. Glaisher, Ph. l. Trans. London. 160. 367. 1870.

für  $\varrho$  von 0 bis 2. Tab. 1 enthält diese Werte für  $x$  von 0 bis 1 in Schritten von 0,05, außerdem die Werte von 1 bis 7,5 in Schritten von 0,5.

Es sei für den reellen Teil von  $U_{rs}$  nach (59) eine Entwicklung für große Werte von  $x$  aufgeführt. Für Werte von

Tabelle 1

$x$	$Re(U_{rs})$	$J_m(U_{rs})$
0,00	+2,442	-1,401
0,05	+2,34	-0,801
0,10	+2,22	-0,214
0,15	+2,00	+0,250
0,20	+1,69	+0,649
0,25	+1,38	+0,973
0,30	+0,960	+1,150
0,35	+0,58	+1,240
0,40	+0,15	+1,240
0,45	-0,18	+1,161
0,50	-0,412	+0,991
0,55	-0,62	+0,776
0,60	-0,78	+0,531
0,65	-0,84	+0,274
0,70	-0,82	+0,019
0,75	-0,74	-0,214
0,80	-0,61	-0,407
0,85	-0,44	-0,528
0,90	+0,25	-0,607
0,95	-0,06	-0,626
1,00	+0,136	-0,594
1,50	-0,059	+0,409
2,00	+0,039	-0,313
2,50	-0,025	+0,254
3,00	+0,013	-0,214
3,50	-0,011	+0,183
4,00	+0,007	-0,160
4,50	-0,006	+0,142
5,00	+0,005	-0,128
5,50	-0,004	+0,117
6,00	+0,004	-0,107
6,50	-0,003	+0,098
7,00	+0,002	-0,091
7,50	-0,001	+0,085

$x$ , für die der Ungleichung  $x > 17$  genügen, läßt sich  $Ci(x)$  in eine Potenzreihe von der Form

$$Ci(x) = \frac{\sin x}{x} \left( 1! - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} \right)$$

entwickeln. Für den Ausdruck (59) ergibt sich somit, falls man  $\sqrt{(2x)^2 + 1} \approx x$  und  $2\pi x = s$  setzt:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re}(U_{rs}^1) = 4 \left\{ \frac{\sin s}{s} \left( 1 - \frac{(2! - \frac{\pi^2}{2})}{s^2} + \dots \right) \right. \\ \left. - \frac{\cos s}{s} \left( \frac{1}{s} - \frac{(3! - \frac{3}{2}\pi^2)}{s^2} + \dots \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Entwicklung stimmt für solche Werte von  $s$ , für die  $l/s^2$  vernachlässigt werden kann, überein mit der Darstellung von M. Abraham<sup>1)</sup> für einen einfachen Dipol. Die diesbezügliche Formel (12) lautet dort etwas anders geschrieben:

$$V(s) = C \left\{ \frac{\sin s}{s} \left( 1 - \frac{1}{s^2} \right) - \frac{\cos s}{s^2} \right\}.$$

Für große Entfernungen geht die obige Darstellung der  $U_{rs}$  über in die Darstellung für den einfachen Dipol.

Ferner sei der Ausdruck  $U_{rs}^2$  berechnet. Dieser ist gegeben durch

$$(65) \quad U_{rs}^2 = \int_{l_s} E_r^2 \sin k_s z_s dz_s,$$

wobei  $E_r^2$  durch (54) bestimmt ist. Durch mehrfache partielle Integration läßt sich dieses Integral auswerten, doch sei dieser Ausdruck wegen seiner unübersichtlichen Form nicht allgemein angegeben. Für den speziellen Fall, daß  $k_r = k_s = k$  ist und die Integrationsgrenzen des  $s$ -ten Leiters  $z_{s1} = 0$ ,  $z_{s2} = l_s = \frac{\lambda}{2}$  und  $z_{r1} = 0$ ,  $z_{r2} = l_r = \frac{\lambda}{2}$  sind, werde dieser Ausdruck noch wie folgt angegeben. Es ergibt sich:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{rs}^2 = \frac{1}{2ik} & \left[ Ei(i\pi\xi) + Ei(i\pi\eta) - 2Ei(i2\pi x) \right. \\ & - \frac{(2\pi x)^2}{2} \left\{ Ei(i\pi\xi) + Ei(i\pi\eta) - 2Ei(i2\pi x) \right\} \\ & + e^{i\pi\sqrt{(2x)^2+1}} + e^{i2\pi x} \\ & + i\pi \left\{ 2x e^{i2\pi x} + \sqrt{(2x)^2+1} e^{i\pi\sqrt{(2x)^2+1}} \right. \\ & \left. \left. + Ei(i\pi\xi) - Ei(i\pi\eta) \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

1) M. Abraham, a. a. O.

Zur Abkürzung ist darin wieder  $\varrho = \lambda x$ , ferner

$$\xi = \sqrt{(2x)^2 + 1} + 1 \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt{(2x)^2 + 1} - 1 \quad \text{gesetzt.}$$

Der reelle und imaginäre Teil von (66) wurde für Werte von  $x$  von 0 bis 1 berechnet und in Figg. 4 und 5 aufgezeichnet.

Insbesondere erhält man aus Gl. (66) gemäß Gl. (56a) die durch Gl. (8) definierte Empfindlichkeit der betrachteten Strahler. Hierbei ist nun zu berücksichtigen, daß wir einen endlichen Querschnitt der Leiter angenommen haben. Für  $\lim \varrho = 0$  bzw.  $x = 0$  wird der durch Gleichung (8) definierte, auf das elektrische Moment bezogene Ausdruck  $\Re(-U_{rs}^2)$ , wobei  $U_{rs}^2$  durch den Ausdruck (66) gegeben ist, unendlich groß. Wir müssen

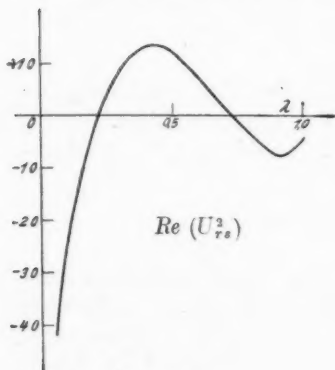


Fig. 4

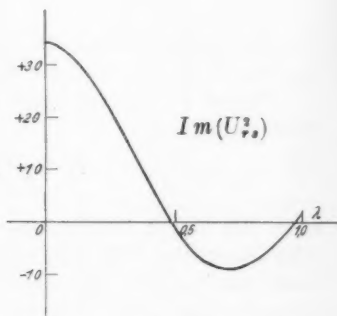


Fig. 5

hier also die Verteilung des Momentes über den Querschnitt berücksichtigen. Durch Einführung der in Gl. (24) definierten Verteilungsfunktion erhält man aus Gl. (66), wenn wir zur Abkürzung  $U_{rs}^2 = U(\varrho)$  schreiben, für den zweiten Anteil des Entwicklungskoeffizienten der Selbstkraft des Leiters den Ausdruck

$$(67) \quad U_{rs}^2 = \frac{\int \Re \{ U(\varrho) \} u(\varrho) \varrho d\varrho}{\int U(\varrho) \cdot \varrho \cdot d\varrho},$$

wobei die Integration nach  $\varrho$  über den Leiter zu erstrecken ist. Da die Radien der Leiter als klein gegen die Länge der Leiter, bzw. gegen die Wellenlänge vorausgesetzt sind, so

lassen sich die in Gl. (66) für  $x$  bzw.  $\varrho = 0$  nach Null gehenden Glieder vernachlässigen, ferner die für  $\varrho = 0$  einem konstanten Grenzwert zustrebenden Glieder über den Querschnitt des Leiters als konstant ansehen. Die Integration in Gl. (67) ist daher nur über das für  $\varrho = 0$  dem Grenzwert unendlich zustrebenden Glied auszuführen. Wir erhalten demzufolge aus Gl. (66) für den Bereich des Leiters

$$(67a) \quad \begin{cases} U(\varrho) = \frac{1}{2k} \left[ Si(2\pi) + \pi \left( Ci(2\pi) - 1 \right. \right. \\ \left. \left. - Ci\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left( \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} - \frac{\lambda}{2} \right) \right) \right] \right]. \end{cases}$$

Für Gl. (67) erhält man durch Entwicklung von  $Ci(x)$  für die Umgebung des Nullpunktes entsprechend der obigen Bemerkung:

$$(67b) \quad \begin{cases} U_{ss} = \frac{1}{2k} (Si(2\pi) - C - \ln 2\pi) + \frac{\pi}{2k} (Ci(2\pi) - 1) \\ - \frac{\pi}{k} \frac{\int \ln \frac{\varrho}{\lambda} u(\varrho) \varrho d\varrho}{\int u(\varrho) \varrho d\varrho}. \end{cases}$$

Durch Einführung der Verteilungsfunktion  $u(\varrho)$  nach Gl. (24) erhält man mittels partielle Integration

$$C_0 \int \ln \frac{\varrho}{\lambda} J_0(k_e \varrho) \varrho d\varrho = \frac{C_0}{k_e} \ln \frac{\varrho}{\lambda} \cdot \varrho J_1(k_e \varrho) - C_0 \lambda \int J_1(k_e \varrho) d\varrho$$

und somit für das dritte Glied im (67b)

$$(67c) \quad \frac{\int \ln \frac{\varrho}{\lambda} u(\varrho) \varrho d\varrho}{\int u(\varrho) \varrho d\varrho} = \ln \frac{\varrho}{\lambda} - \frac{k_e \lambda \int J_1(k_e \varrho) d\varrho}{J_1(u_e \varrho) \cdot \varrho}.$$

Wir setzen voraus, daß  $|k_e| \gg 1$ , ebenso  $|k_e \varrho| \gg 1$  ist. Wir verwenden die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen. Es gilt:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}.$$

Für das in (67c) auftretende Integral sei die Entwicklung:

$$\int J_1(x) dx = 2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{2+2r}(x)$$

gesetzt; man erhält durch Verwendung der asymptotischen Darstellung:

$$\int J_1(k_\varrho \varrho) d\varrho = \frac{2}{k_\varrho} \sqrt{\frac{1}{2\pi k_\varrho \varrho}} e^{-ik_\varrho \varrho} e^{i\frac{5\pi}{4}} \sum_{r=0}^{\infty} e^{ir\pi}.$$

Für Gl. (67c) erhält man schließlich:

$$\frac{\int \ln \frac{\varrho}{\lambda} u(\varrho) \varrho d\varrho}{\int u(\varrho) \varrho d\varrho} = \ln \frac{\varrho}{\lambda} - \frac{2\lambda}{\varrho} e^{i\frac{\pi}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} e^{ir\pi}.$$

Für die hierin auftretende Summe gilt:

$$\sum_{r=0}^{k-1} e^{ir\pi} = \frac{e^{ik\pi} - 1}{e^{i\pi} - 1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{r=0}^{\infty} e^{ir\pi} = \frac{1}{2}.$$

Für den Realteil des Entwicklungskoeffizienten der Selbstkraft erhält man nach Gl. (67b) schließlich

$$(67d) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re}(U_{ss}^2) &= \frac{1}{2k} (Si(2\pi) - C - \ln(2\pi)) + \frac{\pi}{2k} (Ci(2\pi) - 1) \\ &\quad - \frac{\pi}{k} \ln \frac{\varrho}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt, daß, solange wir die asymptotische Entwicklung für die Besselsche Funktion verwenden können, die Empfindlichkeit des Systems unabhängig vom Material wird.

### § 5. Der Strahlungswiderstand

In diesem und im nächsten Paragraphen werden einige Beispiele und Erläuterungen zu der Lösung des Gleichungssystems (16) gegeben. Diese ist durch die Beziehungen (17) bis (20) vollständig bestimmt. Die darin eingehenden Koeffizienten  $U_{rs}$  sind dem vorigen Paragraphen zu entnehmen. Im folgenden wenden wir uns zunächst der Bestimmung der Strahlungswiderstände zu, die sich aus der Lösung von (16) ergeben. Es sei sowohl der Strahlungswiderstand jedes einzelnen strahlenden Elementes wie der der Gesamtanordnung betrachtet. Wir greifen zurück auf das Gleichungssystem (16). Dieses lautet:



$$(16) \quad \begin{cases} \left( v_s^2 - v^2 - i \frac{v}{c} \frac{2\delta_s}{l_s} U_{ss} \right) A_s \\ - i \frac{v}{c} \frac{2\delta_s}{l_s} \sum_r A_r U_{rs} = i \frac{v}{c} \frac{2\delta_s}{l_s} V_s \\ r = 1 \dots N, \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$(68) \quad \begin{cases} (v_s^2 - v^2) - A_s i \frac{v}{c} \frac{2\delta_s}{l_s} \sum_r A_r U_{rs} = i \frac{v}{c} \frac{2\delta_s}{l_s} V_s \\ r = 1 \dots N. \end{cases}$$

In dieser Gleichung sind die  $U_{ss}$  durch die Koeffizienten der Selbstkraft nach (60) bzw. (62) gegeben. Durch Gl. (16) bzw. (68) werden zwei Gruppen von je  $N$ -Parameter, die die  $N$ -Ströme  $A_s$  einerseits und die  $N$  anregenden elektromotorischen Kräfte andererseits darstellen, verknüpft. Je nachdem nun die eine oder andere Gruppe von Variablen als bekannt vorausgesetzt wird, gelangt man zu verschiedenen Werten der Strahlungswiderstände.<sup>1)</sup> Die Strahlungsdämpfung bzw. der daraus folgende Strahlungswiderstand  $R_s$  des  $s$ -ten strahlenden Elementes ist nach (68) gegeben durch den Ausdruck:

$$(69) \quad R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{A_s} U_{rs} \right\}$$

oder, wenn man noch zu dem technischen Maßsystem übergeht, durch

$$(70) \quad R_s = 30 \Re e \left\{ \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{A_s} U_{rs} \right\}.$$

Wir führen nach Gl. (17) die Lösungen für die Ströme  $A_s$  ein und erhalten für Gl. (69):

$$(71) \quad R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \sum_{r=1}^N U_{rs} \frac{d_r}{d_s} \right\}.$$

1) Jede beliebige Antennenspeisung ist darstellbar durch eine Wechselspannung in Reihe mit einer Impedanz. Die Größe der Impedanz ist abhängig von der Art des Speisungssystems. Ist die Impedanz sehr groß, so wird die Stromstärke wenig abhängig von den Antennenkonstanten. Ist dagegen die Impedanz sehr klein, so ist die Spannung sehr wenig abhängig von den Antennenkonstanten.

Der Strahlungswiderstand des Gesamtsystems  $R_{\text{res}}$  bestimmt sich durch:

$$(72) \quad R_{\text{res}} = \sum_{r=1}^N R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N U_{rs} \frac{d_r}{d_s} \right\}.$$

Entsprechend obiger Bemerkung nehmen wir zunächst sämtliche Ströme  $A_s$  als gleich sowohl dem Betrage wie der Phase nach an. Dieser Ansatz ist üblich bei der Berechnung des Strahlungswiderstandes gleichphasig gespeister Mehrfachantennensysteme aus dem Integral des Poyntingschen Vektors über eine das Strahlungssystem einschließende Fläche. Aus (69) ergibt sich unter der Voraussetzung gleicher Ströme der Strahlungswiderstand des  $s$ -ten Leiters zu<sup>1)</sup>

$$(73) \quad R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \sum_{r=1}^N U_{rs} \right\}.$$

Für den Gesamtwiderstand des Systems  $R_{\text{res}}$  erhält man aus (72):

$$(74) \quad R_{\text{res}} = \sum_{s=1}^N R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N U_{rs} \right\}.$$

Nun werde als 2. Fall angenommen, daß die sämtlichen anregenden elektromotorischen Kräfte  $V_s$  gleiche Werte besitzen. Der Strahlungswiderstand des  $s$ -ten Leiters ergibt sich nach (69) unter Verwendung eines Satzes über Minoren von Determinanten zu

$$(75) \quad R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ \frac{d}{d_s} \right\}.$$

Der Gesamtwiderstand berechnet sich unter der Voraussetzung gleicher Anregungsspannungen nach (72) zu

$$(76) \quad R_{\text{res}} = \sum_s R_s = \frac{1}{c} \Re e \left\{ d \sum_{s=1}^N \frac{1}{d_s} \right\}.$$

Als Beispiel sei ein System von  $N$  parallelen, gleichphasig erregten Strahlern, die auf gleicher Höhe angeordnet sind, betrachtet. Die Leiter besitzen sämtlich eine Länge gleich der halben Wellenlänge der erregenden Schwingung. Die Abstände der einzelnen Leiter voneinander seien  $\varrho = \lambda/2$ .

1) A. Pistolokors, a. a. O.

Demgemäß werden diejenigen Koeffizienten  $U_{rs}$ , für die  $|r-s|$  gleiche Werte besitzt, identisch. Aus (73) ergibt sich für den Strahlungswiderstand des  $s$ -ten Elementes unter Annahme gleicher Ströme

$$(77) \quad R_s = 30 \Re e \left\{ \sum_{r=1}^N U_{rs} \right\}$$

Für den Gesamtstrahlungswiderstand  $R_{\text{res}}$  erhält man nach (73)

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{\text{res}} &= 30 \Re e \left\{ \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N U_{rs} \right\} = 30 \Re e \{ N U_0 + (N-1) U_{\lambda/2} \\ &+ (N-2) U_{\lambda} + (N-3) U_{3\lambda/2} + \dots + (N-s) U_{s\lambda/2} \\ &+ \dots + U_{(N-1)\lambda/2} \}, \end{aligned} \right.$$

hier bedeutet  $U_{s\lambda/2}$  den Wert für  $U_{rs}$  mit dem Argument  $\varrho = s\lambda/2$ .

Die hier auftretenden Koeffizienten  $U_{rs}$  entnehmen wir in diesem Falle aus der Tab. 1. Für Anordnungen, die aus 2–5 Elementen bestehen, wurde  $R_s$  und  $R_{\text{res}}$  berechnet und in Tab. 2 angegeben. Die Strahlungswiderstände  $R_s$  und die resultierenden Strahlungswiderstände  $R_{\text{res}}$  für den Fall gleicher Anregungsspannung wurden für 2, 3 und 4 Strahler unter denselben Voraussetzungen nach Gl. (75) bzw. (76) berechnet und sind aus Tab. 3 ersichtlich.

Tabelle 2

$n$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_{\text{res}}$
2	60,9	60,9	—	—	—	121,8
3	65,0	48,5	65,0	—	—	178,5
4	63,2	52,6	52,6	63,2	—	231,8
5	64,4	50,9	56,7	50,9	64,4	287,3

Strahlungswiderstände in Ohm für parallele, gleichphasig erregte  $\lambda/2$  Strahler bei gleichen Strömen

Tabelle 3

$n$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_{\text{res}}$
2	60,9	60,9	—	—	121,8
3	68,9	49,2	68,9	—	187,0
4	64,5	53,9	53,9	64,5	236,8

Strahlungswiderstände in Ohm für parallele, gleichphasig erregte  $\lambda/2$  Strahler bei gleichen Anregungsspannungen

Für den Fall, daß die Leiter in verschiedenen Höhen angeordnet sind, sei noch eine Tabelle der Werte für  $\Re(U_{rs})$ , die aus der Formel (60) folgen, angegeben. Darin bedeutet  $\varrho$  der Abstand der Leiter,  $h$  die Differenz der Höhen der Fußpunkte der Leiter. Die Werte sind für  $\varrho$  und  $h$  in Schritten von  $\lambda/2$  berechnet. Die in Tab. 4 angegebenen Werte sind die mit dem Faktor 30 multiplizierten, aus Formel (60) sich ergebenden Werte. Die Tafel ist von A. Pistolkors<sup>1)</sup> angegeben. Die Tab. 4 gestattet die Berechnung der Strahlungswiderstände für Leiter von der Länge  $\lambda/2$  unter der Annahme gleicher Ströme in den Leitern.

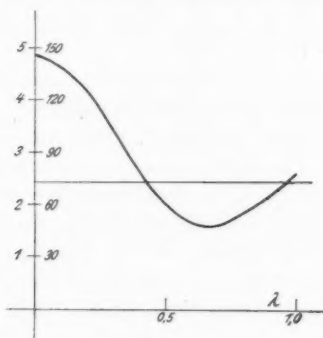


Fig. 6

Schließlich sei noch der resultierende Strahlungswiderstand von zwei gleichphasig erregten parallelen Leitern berechnet in Abhängigkeit von der gegenseitigen Entfernung. Dieser ist gegeben durch

$$(79) \quad R_{\text{res}}^{(2)} = 30 \Re \{ 2 U_{11} + 2 U_{12} \},$$

wobei die  $U_{rs}$  aus Tab. 1 entnommen sind. Diese Werte sind in Fig. 6 aufgetragen.

Diese kurzen Beispiele mögen genügen, um die Berechnung der Strahlungswiderstände zu erläutern. Ebenso läßt sich die Berechnung der Strahlungswiderstände weiterer Antennenanordnungen durchführen. Doch sei an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen.

1) A. Pistolkors, a. a. O.

Tabelle 4

$\frac{e}{h}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
0,0	+ 73,29	- 12,36	+ 4,08	- 1,77	+ 1,18	- 0,75	+ 0,42	- 0,33
0,5	+ 26,40	- 11,80	+ 8,83	- 5,75	+ 3,76	- 2,79	+ 1,86	- 1,54
1,0	- 4,005	- 0,78	+ 3,56	- 6,26	+ 6,05	- 5,67	+ 4,51	- 3,94
1,5	+ 1,78	+ 0,80	- 2,92	+ 1,96	+ 0,16	- 2,40	+ 3,24	- 3,76
2,0	- 0,96	- 1,00	+ 1,13	+ 0,56	- 2,55	+ 2,74	- 2,07	+ 0,74
2,5	+ 0,58	+ 0,45	- 0,42	- 0,96	+ 1,59	- 0,28	- 1,59	+ 2,66
3,0	- 0,43	- 0,30	+ 0,13	+ 0,85	- 0,45	- 0,10	+ 1,74	- 1,03

$\frac{e}{h}$	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
0,0	+ 0,21	- 0,18	+ 0,15	- 0,12	+ 0,12	- 0,10	+ 0,06	- 0,03
0,5	+ 1,08	- 0,85	+ 0,69	- 0,57	+ 0,51	- 0,45	+ 0,36	- 0,30
1,0	+ 3,08	- 2,50	+ 2,10	- 1,80	+ 1,56	- 1,18	+ 1,14	- 1,00
1,5	+ 3,68	- 3,40	+ 3,14	- 2,90	+ 2,61	- 2,31	+ 2,06	- 1,86
2,0	+ 0,51	- 1,30	+ 1,82	- 2,24	+ 2,28	- 2,29	+ 2,26	- 2,14
2,5	- 2,49	+ 2,00	- 1,35	+ 0,49	- 0,06	- 0,45	+ 0,85	- 1,03
3,0	- 0,09	+ 1,12	- 1,87	+ 1,77	- 2,02	+ 1,71	- 1,32	+ 0,66

## § 6. Antenne mit abgestimmtem Reflektor

Als ein weiteres Beispiel für die Lösung des Gleichungssystems (16) sei eine Anordnung betrachtet, die nur aus zwei Leitern besteht, aus einem Strahler, der von einer äußeren elektromotorischen Kraft gespeist sei und aus einem nicht gespeisten zweiten Leiter, einem Reflektor. Beide Leiter seien parallel auf gleicher Höhe angeordnet. Für diese Anordnung gelten die beiden Gleichungen

$$(80) \quad \begin{cases} \left( \nu_1^2 - \nu^2 - \frac{i\nu}{c} \frac{2\delta_1}{l_1} U_{11} \right) A_1 - \frac{i\nu}{c} \frac{2\delta_1}{l_1} U_{12} A_2 = \frac{i\nu}{c} \frac{2\delta_1}{l_1} V_1 \\ \left( \nu_2^2 - \nu^2 - \frac{i\nu}{c} \frac{2\delta_2}{l_2} U_{22} \right) A_2 - \frac{i\nu}{c} \frac{2\delta_2}{l_2} U_{21} A_1 = 0. \end{cases}$$

Wir setzen voraus, daß Antenne und Reflektordraht je eine Länge der halben Wellenlänge der erregenden Schwingung besitzen. Dadurch vereinfacht sich Gl. (80) und man erhält daraus

$$(81) \quad \begin{cases} U_{11} A_1 + U_{12} A_2 = V_1 \\ U_{21} A_1 + U_{22} A_2 = 0. \end{cases}$$

Das Verhältnis  $A_2$  zu  $A_1$ , Strom im Reflektor und Strom in der Antenne, ist gegeben durch

$$(82) \quad \frac{A_2}{A_1} = - \frac{U_{21}}{U_{11}} = \alpha e^{i\psi_n}.$$

Mittels des Ausdruckes (59) wurde der Betrag  $\alpha$  und der Phasenwinkel  $\psi_{12}$  von (82) berechnet in Abhängigkeit von der gegenseitigen Entfernung der beiden Leiter. Der Betrag  $\alpha$  ist in Fig. 7, der Phasenwinkel  $\psi_{12}$  in Fig. 8 aufgetragen. Aus (81) ergibt sich der Kombinationsstrahlungswiderstand. Dieser berechnet sich im technischen Maßsystem zu

$$(83) \quad R = 30 \Re e \left\{ U_{11} - \frac{U_{12} U_{21}}{U_{22}} \right\}.$$

Dieser Ausdruck wurde für die beiden Leiter von der Länge  $\lambda/2$  mittels der Beziehung (59) berechnet. Die sich für den Strahlungswiderstand ergebenden Werte in Abhängigkeit von der gegenseitigen Entfernung der beiden Leiter sind aus Fig. 9 ersichtlich. Der Strahlungswiderstand besitzt ein Maximum für einen Abstand der beiden Leiter von der Größe  $0,35 \lambda$ .

Ferner sei das Strahlungsdiagramm dieser Anordnung betrachtet. Es gilt für die Gruppencharakteristik<sup>1)</sup>, d. h. für den Poyntingschen Vektor in einer Ebene senkrecht zu den

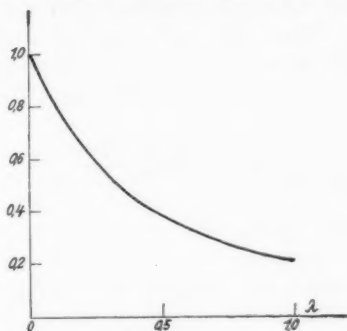


Fig. 7

Strahlern, wenn das Azimut in dieser Ebene von der Verbindungslinie der beiden Strahler aus gezählt ist

$$(84) \quad |\bar{E}| = C \{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(k\rho \cos\varphi + \psi_{12})\}.$$

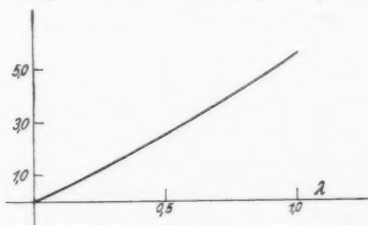


Fig. 8

Dabei bedeutet  $\alpha = \frac{A_2}{A_1}$  das durch Gl. (82) definierte und in Fig. 7 dargestellte Amplitudenverhältnis,  $\psi_{12}$  die in Fig. 8 dargestellte Phasendifferenz der Schwingungen der beiden Leiter,  $\rho$  den Abstand der beiden Strahler,  $C$  ist eine hier nicht interessierende Konstante. Für die Strahlung nach vorn, also für  $\varphi = 0$ , wurde Gl. (84) für die betrachtete Anordnung im

1) R. Bechmann, Telefunkenzeitung Heft 53. S. 54. 1929.

Intervall von Null bis  $\lambda$  berechnet und in Fig. 10 dargestellt. Es ergibt sich insbesondere ein Maximum der Strahlung nach vorn für den Abstand  $0,27 \lambda$ , ein zweites Maximum ergibt sich für den Abstand  $0,79 \lambda$  der beiden Leiter.

Dazu sei erwähnt, daß nach Messungen von Tatarinoff<sup>1)</sup> die beiden Maxima zu  $0,25 \lambda$  und  $0,75 \lambda$  angegeben werden.

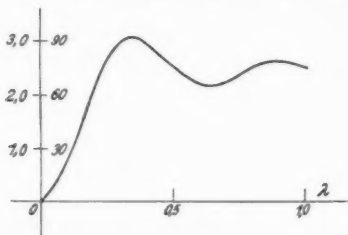


Fig. 9

Weiter gibt Gresky<sup>2)</sup> das Maximum der Strahlung nach vorn nach Messungen für einen Abstand  $0,20 \lambda$  zwischen Antenne und Reflektor an. Aus einer vereinfachten Rechnung leiten Wil-

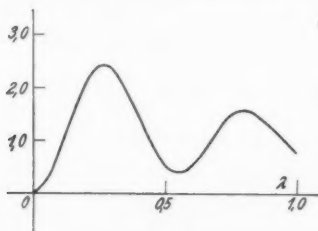


Fig. 10

motte und Mc Petrie<sup>3)</sup> für den günstigsten Abstand zwischen Antenne und Reflektor den Wert  $0,33 \lambda$  ab.

Es sei hervorgehoben, daß einerseits der Abstand zwischen Antenne und Reflektor, der das Maximum des Stromes in der Antenne liefert, und andererseits der Abstand, der das Maximum

1) W. Tatarinoff, Jahrbuch d. drahtl. Telegr. 28. S. 117. 1926.

2) G. Gresky, Jahrbuch d. drahtl. Telegr. 32. S. 149. 1929.

3) R. Wilmotte u. J. Mc Petrie, Journ. J. E. E. 67. 949. 1928.



der Strahlung nach vorn liefert, voneinander verschieden ist. Ersterer wurde im vorigen zu  $0,35 \lambda$ , letzterer zu  $0,27 \lambda$  gefunden.

In dem Fall, der praktisch ebenfalls von Bedeutung ist, daß der Reflektor gegen die Antenne verstimmt ist, hat man auf die Lösung des allgemeineren Ansatzes (80) zurückzugreifen. Doch sei darauf hier nicht eingegangen.

#### Zusammenfassung

Es wurde die Theorie der Strahlungskopplung eines Antennensystems, bestehend aus einer beliebigen Anzahl von geraden, parallelen Leitern behandelt. Entsprechend der Anzahl der Strahler erhält man ein System von ebensoviel Differentialgleichungen vom Typus der Schwingungsgleichung. Die Strahlungsdämpfung wurde durch die Selbstkraft, die Plancksche Reibungskraft, eingeführt. Die induzierten elektrischen Feldstärken zwischen den einzelnen Strahlern wurden in geschlossener Form aus dem Hertzschen Vektor abgeleitet.

Die Kopplungskräfte bzw. ihre Fourierschen Koeffizienten nach den Eigenfunktionen der Strahler wurden berechnet und für die Grundschwingung der Strahler explizit dargestellt.

Die Lösung obigen Gleichungssystems liefert eine einfache Methode zur Berechnung der Strahlungswiderstände. Insbesondere gelingt es durch die obige Methode, die Strahlungswiderstände komplizierter Antennensysteme, vornehmlich solcher Strahlwerferantennen, wie sie heute in der Kurzwellentechnik verwendet werden, zu berechnen. Es wurde ein Beispiel für gleichphasig erregte Strahler angeführt. Weiter wurde das Beispiel einer Antenne mit einem nicht gespeisten Drahtreflektor diskutiert. Der günstigste Abstand zwischen Antenne und Reflektor, der das Maximum der Strahlung nach vorn liefert, wurde berechnet.

#### Literaturübersicht

- E. Hertz, Ges. Werke 2. S. 133 u. 184.  
M. Abraham, Arch. f. Elektrotechn. S. 93. 1919.  
R. Mesny, L'Onde Electrique 6. S. 181. 1927.  
J. A. Fleming, Experim. Wireless 4, S. 387, 1927.  
S. Uda, Journ. J.E.E. of Japan 452. S. 273. 1926; 453. S. 335. 1926;  
456. S. 721. 1926; 462. S. 26. 1927; 462. S. 52. 1927.  
Annalen der Physik. 5. Folge. 4.

- W. Tatarinoff, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **28**. S. 117. 1926.  
R. Wilmotte u. McPetrie, *Journ. J. E. E.* **66**. S. 949. 1928.  
J. R. Carson, *Bell Syst. Techn. Journ.* **3**. S. 393. 1924; *Proc. J. R. E.* **17**. S. 952. 1929.  
G. Gresky, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **32**. S. 149. 1928.  
R. Wilmotte, *Journ. J. E. E.* **66**. S. 961. 1928.  
L. S. Palmer and L. K. Honeyball, *Journ. J. E. E.* **67**. S. 1045. 1929.  
E. C. Englund and A. B. Crawford, *Proc. J. R. E.* **17**. S. 1277. 1929.

**Insbesondere Arbeiten über Strahlungswiderstand:**

- G. W. Pierce, *Proc. Amer. Akad.* **52**. S. 192. 1916.  
B. van der Pol jr., *Proc. Phys. Soc. London* **13**. S. 217. 1917.  
St. Ballantine, *Proc. J. R. A.* **12**. S. 823. 1924; **15**. S. 245. 1927.  
M. Bontsch-Bruijewitsch, *Ann. d. Phys.* **81**. S. 425. 1926.  
S. A. Lewin and C. J. Young, *Proc. J. R. E.* **14**. S. 675. 1926.  
A. A. Pistolokors, *Proc. J. R. E.* **17**. S. 562. 1929.
- Berlin, Telefunken, Gesellschaft für drahtlose Telegraphie,  
Dezember 1929.  
(Eingegangen 17. Dezember 1929)

## **Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge bei der sogenannten elektrischen Gasreinigung:**

### **I. Teil**

#### **Über die maximale Aufladung von Schwebeteilchen**

**Von Rudolf Ladenburg**

**(z. T. gemeinsam mit H. Sachsse)**

(Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem)

(Mit 11 Figuren)

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Übersicht über die Vorgänge in der Korona-Entladung. — § 3. Die Aufladung der Schwebeteilchen im Ionenfelde der Korona-Entladung unter der Wirkung der elektrischen Feldstärke. — § 4. Die Aufladung infolge der unregelmäßigen Wärmebewegung der Gasionen. — § 5. Experimentelle Untersuchungen der maximalen Aufladung von Schwebeteilchen. — § 6. Die Geschwindigkeit und die Abscheidezeit der geladenen Staubteilchen unter der Wirkung des elektrischen Feldes der Korona-Entladung. — Zusammenfassung der Ergebnisse.

### **§ 1. Einleitung**

Zur Entfernung und teilweisen Wiedergewinnung der in den Abgasen industrieller Anlagen enthaltenen Staubb Mengen wird seit etlichen Jahren mit dauernd wachsendem Erfolge das elektrische Verfahren verwendet, das teils nach dem Erfinder Cottrell, teils „Elektrische Gas-Reinigung“ oder auch „Elektrofilter“ genannt wird. Bei diesem Verfahren — im folgenden kurz als EGR. bezeichnet — wird grundsätzlich die folgende Anordnung benutzt.<sup>1)</sup> Längs der Achse geerdeter Metall-

1) Vgl. F. G. Cottrell, Journ. of Industr. and Engeneer Chem. 1911; sowie Smithsonian Rep. f. 1913. S. 653 (Washington); Dtsch. Patentschr. Kl. 12a, Gruppe 2. Bzgl. der historischen u. technischen Entwicklung des Verfahrens vgl. die zusammenfassenden Darstellungen von R. Durrer, Stahl u. Eisen 1919. Nr. 46—50; H. Thein, Ztschr. f. techn. Phys. 2. S. 177ff. 1921; A. Plass, Metall u. Erz 18. 1921.

zylinder oder zwischen geerdeten elektrisch leitenden Platten oder Netzen sind einander parallele dünne Drähte oder andere „Ausströmer“ wie Ketten oder scharfkantige Metallbänder ausgespannt und mit dem negativen Pol eines Gleichstromerzeugers von 30—80000 Volt — je nach dem Abstand der Elektroden und je nach den zu reinigenden Gasen — verbunden. Die so entstehende „Korona-Entladung“ geht von vielen, im Dunklen deutlich sichtbaren Glimmpunkten und -büscheln aus, die sich an einzelnen scharfspitzigen oder vorspringenden Stellen der „Ausströmer“ ausbilden, aber auch an glatten dünnen Drähten entstehen (vgl. S. 868/869 sowie Fig. 1 u. 2). Läßt man durch die Zylinder oder zwischen den Platten rauch-, staub- oder nebelbeladene Gase mit Geschwindigkeiten zwischen etwa  $\frac{1}{2}$  und 5 m in der Sekunde hindurchströmen, so werden bei einem Strom von 0,05—0,5 mA pro Meter Draht, bzw. von  $\frac{1}{2}$ —3 mA pro Quadratmeter Elektrodenfläche die Schwebeteilchen, gleichgültig, welche Natur sie besitzen, häufig nahezu quantitativ aus dem Gasstrom entfernt und an die Wände niedergeschlagen; ein kleiner Teil setzt sich manchmal auch an den Ausströmern ab. Der Staub löst sich nach kürzerer oder längerer Zeit entweder von selbst oder durch mechanische Hilfe von der Wand ab und fällt in Behälter, aus denen er, eventuell zur weiteren Verwertung, entnommen wird. Das Verfahren ist von großer praktischer Bedeutung, und es werden auf diese Weise häufig in einzelnen Anlagen viele Tausend Kubikmeter Gas pro Stunde gereinigt. Besonders wichtig ist die EGR. für die Entfernung feiner Schwebeteilchen unter  $10^{-3}$  cm Größe, die durch die Schwere in Staubkammern oder durch die Zentrifugalkraft in gekrümmten Kanälen nicht glatt aus dem Gasstrom entfernt werden können.

In den zahlreichen vorliegenden Arbeiten über die Vorgänge bei der EGR.<sup>1)</sup> wird stillschweigend oder ausdrücklich

Heft 21; E. Zopf, Chem. Ztg. 1923. Nr. 117/118; C. Hahn, Siemens-Zs. Januar 1924; W. Deutsch, Handb. d. physik. u. techn. Mechanik 6. S. 402 ff. 1928, sowie die in der folgenden Anmerkung genannten Arbeiten.

1) Vgl. außer der obengenannten Literatur besonders W. W. Strong, Ann. d. Phys. 48. S. 251. 1915; V. Kohlschütter u. I. L. Tüscher, Ztschr. f. Elektrochemie 27. S. 225. 1921; W. Deutsch, Ann. d. Phys. 68. S. 335. 1922; Ztschr. f. techn. Physik 6. S. 423. 1925; 7. S. 623. 1926; R. Seeliger, Ebenda 7. S. 49. 1926.

als die wesentlichste, praktisch allein wirksame Ursache die unmittelbare elektrische Wirkung der hochgeladenen Drähte, bzw. des Feldes zwischen Drähten und Niederschlags Elektroden auf die aufgeladenen Staubteilchen angesehen. Dieser Meinung liegt die sicherlich zutreffende Anschauung zugrunde, daß die in den Glimmpunkten dicht am Draht erzeugten und von ihm abgestoßenen negativen Gasionen die Staubteilchen gleichsinnig aufladen und daß diese unter der Wirkung des elektrischen Feldes zur positiv geladenen Niederschlags Elektrode wandern. Maßgebend für die Geschwindigkeit, mit der die Schwebeteilchen auf diese Weise zur Wand gelangen, und für die Wirksamkeit des ganzen Verfahrens ist bei dieser Erklärung die Größe der Ladung, die die einzelnen Teilchen tragen. Wir werden uns deshalb im vorliegenden ersten Teil unserer Untersuchungen mit der Berechnung und der experimentellen Bestimmung dieser Ladung und mit ihrer Abhängigkeit von der Größe und Art der Teilchen und von den äußeren Bedingungen befassen (§ 3—5), zumal die Größe der Maximalladung, die kleine Schwebeteilchen aufnehmen können, an und für sich physikalisch interessant und theoretisch weitgehend berechenbar ist. Aus diesen Maximalladungen werden wir dann die Zeit berechnen, die die geladenen Teilchen unter der Wirkung der elektrischen Kraft brauchen, um zur geerdeten Gefäßwand zu wandern (§ 6).

Neben dieser Bewegung der Schwebeteilchen in der Korona-Entladung der EGR.-Kammer gibt es jedoch eine zweite Fortbewegung derselben durch die elektrischen Windströme. Hierauf soll in einem II. Teil dieser Untersuchungen näher eingegangen werden. Die schnell bewegten Luftionen, die von den einzelnen Glimmpunkten strahlartig zur Gegenelektrode getrieben werden, reißen die umgebende Luft und den in ihr schwebenden Staub mit und treiben ihn mit großer Geschwindigkeit gegen die Wand zu, die rein elektrische Triebkraft des Feldes auf die geladenen Teilchen unterstützend. Wegen der Kontinuität der Gasströmung und wegen ihrer Abbiegung und Bremsung nahe der Wand entstehen zugleich rücktreibende Bewegungen und erzeugen dadurch Wirbel, die man bei geeigneter Anordnung und Beleuchtung leicht unmittelbar sichtbar machen kann. Diese Umwälzung der Gas- und Staubmasse ist indirekt für

die Abscheidung von Bedeutung, da sie die Schwebeteilchen den Ionenströmen zuführt und ihre Aufladung begünstigt und da sie die nicht sogleich abgeschiedenen Teilchen erneut zur Wand befördert. Zwar ist der elektrische Wind an hochgeladenen Spitzen und die Analogie zwischen der Korona-Entladung aus einzelnen Glimmpunkten und dem Spitzenstrom seit langem bekannt, trotzdem wird dieser elektrische Wind im Zusammenhang mit der EGR. in der älteren Literatur nur selten erwähnt<sup>1)</sup>; jedenfalls ist ihm eine wesentliche Rolle für die Wirkung der EGR. früher nicht beigelegt worden. Seine Wichtigkeit für die EGR. ist von F. Haber in einer mündlichen Erörterung des Gegenstandes im September 1921 behauptet und später mehrfach betont worden. Diese Diskussionen haben den Anlaß zu den vorliegenden Untersuchungen gegeben, die im wesentlichen im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, z. T. im Physikalischen Institut der Universität Breslau im Verlauf mehrerer Jahre nach und nach ausgeführt worden sind. Der Ursprung der Arbeit hat es naturgemäß mit sich gebracht, daß Hr. Haber an ihrem Fortgang dauernd lebhaftes Interesse genommen hat. Außerdem haben sich die Herren P. Arendt, H. Kallmann, H. Schweitzer, H. Sachsse und W. Tietze an diesen Untersuchungen beteiligt; sie haben über die Ergebnisse ihrer Spezialarbeiten z. T. bereits an verschiedenen Stellen berichtet.<sup>2)</sup>

## § 2. Übersicht über die Vorgänge in der Korona-Entladung

Wir beginnen unsere Untersuchung mit einer Betrachtung der Vorgänge in der Korona-Entladung, soweit sie für unser Problem der EGR. wesentlich sind. Die Korona-Entladung zwischen einem auf hoher negativer Spannung gehaltenem dünnen Draht oder anderen „Ausströmern“ der Elektrizität und geerdeten Gegenelektroden ist eine selbständige Entladung, bei der durch die hohe Spannung und Feldstärke längs der Ausströmer eine mit Leuchterscheinungen begleitete Ionisation des Gases innerhalb einer dünnen Schicht, der

1) Vgl. F. C. Cottrell, a. a. O. sowie amerik. Patent 895728, S. 2. Ferner z. B. A. F. Meston, *The Electr. Journ.* Juni 1917.

2) P. Arendt, Dissertat. Berlin 1926; P. Arendt u. H. Kallmann, *Ztschr. Phys.* 35. S. 421. 1926; W. Tietze, Dissertat. Berlin 1929; Hans Schweitzer, *Ann. d. Phys.* [5] 4. S. 33. 1930.

„Glimmschicht“, eintritt; außerhalb dieser dünnen Schicht wandern die gleichsinnig mit den Ausströmern (negativ) geladenen Gasionen unter der Wirkung des Spannungsabfalls mit großer Geschwindigkeit zur Gegenelektrode. Wesentlich für die Wirkung der EGR. ist eine möglichst hohe Spannungsdifferenz zwischen den Ausströmern und der Gegenelektrode; dadurch wird die wirksame Feldstärke im Gasraum, die Ionendichte und die Stärke des zur Gegenelektrode fließenden Stromes möglichst groß. Diese drei Größen sind wie wir in den folgenden Paragraphen ausführlicher besprechen werden, maßgebend für die Aufladung der aus dem Gas zu entfernenden Schwebeteilchen und für die Geschwindigkeit, mit der sie abgeschieden werden. Steigert man aber die Spannung über einen gewissen Wert, der natürlich von den geometrischen Verhältnissen der Elektroden, in hohem Maß aber auch von der Gasart und -beschaffenheit abhängt, so geht die Korona-Entladung mehr oder weniger plötzlich in eine Funken- bzw. Bogenentladung über, bei der der ganze auf die ausgedehnten Flächen der Elektroden verteilte Strom sich auf *eine* enge Strombahn konzentriert. Dadurch bricht im größten Teil des Raumes das elektrische Feld zusammen, die Abscheidung der Schwebeteilchen hört auf, eventuell wird sogar die Anlage durch die große Stromdichte des Lichtbogens zerstört. Die zuverlässige Einhaltung der „Grenzspannung“ der Korona-Entladung ist daher die erste Aufgabe für die technische Durchführung der EGR. Diese Grenzspannung liegt bei negativer Aufladung der Ausströmer höher und ist im allgemeinen sicherer einzuhalten als bei positiver. Dies ist einer der Gründe für die negative Aufladung der Ausströmer.<sup>1)</sup>

Für die Berechnung der Aufladung der Schwebeteilchen und der Geschwindigkeit, mit der sie infolge dieser Aufladung zur Niederschlagselektrode wandern, ist die Kenntnis der Feldstärke

---

1) Nähere Zahlenangaben über die Charakteristik der Korona-Entladung, die Grenzspannung und ihre Abhängigkeit von Gasart, Gasdruck usw., vgl. z. B. Townsend, Marx' Handb. d. Radiol. 1. S. 332 ff.; O. W. Schumann, Elektr. Durchbruchfeldstärke von Gasen, 1923, Abschn. III; R. Seeliger, „Gasentladungen“ Leipzig 1927 und Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 62. 1926; W. Deutsch, Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. VI, a. a. O.

zwischen den Elektroden und die der Raumladung, d. h. der Ionendichte notwendig. Nur bei sehr dünnen und sehr sauberen Drähten ist ein gleichmäßiges Glimmen längs des ganzen Drahtes und ein gleichmäßiger Strom parallel zum Draht aufrecht zu erhalten.<sup>1)</sup> Bei den in der Technik verwandten nicht allzu



Fig. 1



Fig. 2

Korona-Entladung mit Glimmbüscheln, Glimmpunkten und Glimmbaut an *negativ* geladenem Draht. Die Stromstärke pro cm Draht ist in Fig. 2 erheblich größer als in Fig. 1. In Fig. 2 ist der Draht selber sichtbar, da er durch eine zweite Aufnahme bei künstlicher Beleuchtung auf die gleiche Platte bei unveränderter Stellung der Kamera photographiert wurde.

1) Vgl. J. Frank, Dissertation, Berlin 1906; Ann. d. Phys. 21. S. 972. 1907.



dünnen und naturgemäß unsauberen Drähten bilden sich, wie schon in der Einleitung erwähnt, im allgemeinen einzelne, mehr oder weniger isolierte Glimmpunkte aus, die häufig hin- und herwandern.<sup>1)</sup> Die photographischen Aufnahmen in Fig. 1 und 2 zeigen derartige Glimmpunkte.<sup>2)</sup> Aus ihnen strömt — gerade wie aus Spitzen — die hochgespannte Elektrizität in Form einzelner „Spitzenströme“ aus. Das an der Drahtoberfläche herrschende Spannungsgefälle reicht nämlich nur an einzelnen Punkten, die durch ihre scharfspitzige Form, durch kleine, eventuell mikroskopisch kleine Unebenheiten oder durch oberflächliche Verunreinigungen ausgezeichnet sind, zum Durchbruch der Entladung und zur Ausbildung des Spitzenstroms aus. Warburg hat hierfür folgende Erklärung gegeben<sup>3)</sup>: Nach seinen älteren Untersuchungen<sup>4)</sup> entspricht die Spitzenentladung und daher auch die Korona-Entladung der Glimmpunkte völlig der kathodischen Glimmentladung unter vermindertem Druck, der Potentialabfall an der negativen Spitze dem Kathodenfall. Gerade wie dieser je nach dem Metall und der Oberflächenbeschaffenheit der Kathode verschieden ist, werden verschiedene Stellen des Drahtes je nach ihrer zufälligen Beschaffenheit verschiedenen „Kathodenfall“ besitzen, und die Entladung wird dort einsetzen, wo gerade der *kleinste Kathodenfall* herrscht; denn dort ist die vorhandene Feldstärke imstande, Stoßionisation hervorzurufen.

Bei der Berechnung des Feldverlaufs zwischen Ausströmer und Wand ist natürlich der Einfluß zu berücksichtigen, den

---

1) Auch bei Verwendung der in der Einleitung genannten scharfkantigen Bänder als Ausströmer sieht man im Dunkeln deutlich, daß die Korona-Entladung wesentlich an einzelnen Punkten einsetzt. Vielfach werden diese Bänder in der Praxis hochkant netzartig angeordnet, wobei jedes zweite Band bis auf ein kurzes Stück herausgeschnitten wird: dann sprühen, wie man im Dunkeln unmittelbar sieht, vornehmlich die scharfen Ecken der Schnittstellen (Photogr. Aufnahmen der Glimmpunkte eines solchen Netzes bei R. Seeliger, *Ztschr. f. techn. Phys.* 7. S. 60. 1926 [Tafel 11]).

2) Vgl. ferner z. B. die im Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. VI. S. 456 reproduzierten Aufnahmen der positiven und der negativen Korona-Entladung an dünnen Drähten.

3) Vgl. Handb. d. Phys. 14. Ziff. 10. 1927.

4) E. Warburg, *Wied. Ann.* 40. S. 9. 1890.

die in den einzelnen Spitzenströmen wandernden Ionen durch die so entstehende Raumladung ausüben. Statt jedoch die einzelnen Spitzenströme der verschiedenen Glimmpunkte in Rechnung zu setzen, wollen wir zur Vereinfachung so rechnen, als ob die Ausströmer gleichmäßig mit einer dünnen Glimmschicht umgeben sind, in der die Ionen beiderlei Vorzeichens entstehen — wie es bei sehr dünnen und sauberen Drähten wirklich der Fall ist — und als ob außerhalb dieser Schicht eine gleichförmige Strömung negativer Ionen zur geerdeten Zylinderwand stattfindet. Ferner wollen wir unsere Betrachtungen auf den Fall eines Zylinderkondensators beschränken, d. h. auf eine zylindrische EGR.-Kammer, in deren Achse ein relativ dünner Draht ausgespannt und gegenüber der geerdeten Wand auf ein hohes negatives Potential aufgeladen ist. Diese Beschränkung erleichtert die Rechnung beträchtlich, die gewonnenen Ergebnisse bleiben in ihren wesentlichen Punkten auch auf andere Entladungsräume anwendbar. Zugleich sollen hierbei die die Spitzenströme begleitenden, durch die Strahlen schnell bewegter Ionen mitgerissenen Windströme und alles was damit zusammenhängt, vorläufig außer Betracht gelassen, und es soll auf diese Dinge ausführlich erst im II. Teil dieser Untersuchungen eingegangen werden.

Es wird sich also im folgenden zunächst um die Berechnung der maximalen Aufladung handeln, die die Schwebeteilchen im Ionenfelde unter den eben erläuterten Verhältnissen annehmen. Diese maximale Aufladung ist durch verschiedene Umstände bestimmt: einerseits durch die elektrische Kraft des Feldes und die Bildkraft, die die Gasionen auf die Teilchen treiben, sowie durch die unregelmäßige Wärmebewegung der geladenen Gasmoleküle, d. h. die Diffusion der Ionen, wobei nicht nur der der Gastemperatur entsprechenden mittleren Energie, sondern auch den extrem schnellen Teilchen gemäß der Häufigkeit der Maxwell'schen Verteilung Rechnung zu tragen ist<sup>1)</sup>; andererseits wird die potentielle Energie zwischen den aufgeladenen Schwebeteilchen und den Gasionen der Aufladung eine Grenze setzen. Wiederum werden wir keine strenge Durchrechnung des allgemeinen

---

1) Vgl. W. Deutsch, Ann. d. Phys. 68. S. 336. 1922.

Problems versuchen, zumal in Praxis die allgemeine Gasströmung und die elektrischen Windströmungen abermals die Aufgabe wesentlich komplizierter machen. Vielmehr werden wir getrennt einmal die treibende Wirkung der elektrischen Kraft des Feldes und die Bildkraft gegenüber der abstoßenden Kraft des aufgeladenen Schwebeteilchens auf die herangetriebenen Ionen gleichen Vorzeichens betrachten (§ 3) — ein schon von Rohmann<sup>1)</sup> untersuchtes Problem — zweitens werden wir, die Theorie von H. Kallmann<sup>2)</sup> verwertend, die im feldfreien Raum stattfindende Diffusion der Ionen gegen die Schwebeteilchen und deren allmähliche Aufladung bis zu ihrem Maximalwert verfolgen und durch einen Vergleich der beiden Ergebnisse erkennen, daß je nach der Teilchengröße der eine oder der andere Vorgang maßgebend ist (§ 4). Die experimentellen Untersuchungen der unter wohldefinierten Bedingungen tatsächlich auftretenden Ladungen von Schwebeteilchen, wie sie teils von Rohmann und von Deutsch (a. a. O.), teils auf meine und Hrn. Kallmanns Veranlassung von P. Arendt und schließlich von H. Schweitzer und H. Sachsse ausgeführt sind, werden eine Prüfung und Bestätigung der theoretischen Überlegungen in gewissen Grenzen gestatten (§ 5). Als Endziel dieser Untersuchungen folgt dann die Berechnung der unter der Wirkung der elektrischen Feldstärke im Gasraum entstehenden Geschwindigkeit der Schwebeteilchen und der Zeit, die auf Grund dieser Berechnung zur Abscheidung verschieden großer Teilchen erforderlich ist (§ 6). Ein Vergleich dieser Zeit mit der in den technisch benutzten EGR.-Kammern für die im strömenden Gas mitbewegten Staubeilchen zur Verfügung stehenden Zeit erlaubt in gewissen Grenzen ein Urteil, wieweit die genannten Ursachen zur Erklärung der Erfolge der EGR. ausreichen.

**§ 3. Die Aufladung der Schwebeteilchen im Ionenfelde der Korona-Entladung unter der Wirkung der elektrischen Feldstärke**

Zur Berechnung der Aufladung der in das Ionenfeld einer zylindrischen EGR.-Kammer gebrachten Schwebeteilchen

---

1) F. Rohmann, Ztschr. f. Phys. 17. S. 253. 1923.

2) Vgl. P. Arendt u. H. Kallmann, a. a. O.; vgl. auch F. v. Hauer, Ann. d. Phys. 61. S. 308. 1920 und W. Deutsch, a. a. O.

sollen sie als kugelförmig vom Radius  $\varrho$  betrachtet werden. Die in Wahrheit unregelmäßige Gestalt der Teilchen läßt sich theoretisch schwer fassen<sup>1)</sup>; besondere Versuche über dieses Problem, die in § 5 beschrieben werden, zeigen, daß unregelmäßig geformte Teilchen ähnliche Ladungen und elektrische Beweglichkeit annehmen wie kugelförmige. Zunächst werde allein die Wirkung berücksichtigt, die durch die, die Ionen auf die Staubteilchen treibende Kraft des elektrischen Feldes und die Bildkraft einerseits, und durch die abstoßende Kraft des geladenen Teilchens andererseits zustande kommt<sup>2)</sup> — die aufladende Wirkung der unregelmäßigen Wärmebewegung der Ionen soll erst im folgenden Paragraph behandelt werden. Spontane Aufladungen der Teilchen *vor* ihrem Eintritt in das elektrische Feld können unberücksichtigt bleiben, da diese die maximale Aufladung durch die Ionen nicht verändern, sondern nur je nach ihrem Vorzeichen die Zeit bis zur maximalen Aufladung verzögern oder beschleunigen. Übrigens scheint die spontane Ladung im allgemeinen praktisch keine Bedeutung zu besitzen, da das rein statische Feld eines Plattenkondensators ohne Korona-Entladung im allgemeinen keine erhebliche Abscheidung hervorruft, vielmehr für eine erfolgreiche Entstaubung eben die Korona-Entladung erforderlich ist.<sup>3)</sup> Auch die Aufladung in der Glimmschicht selbst, wo Ionen beiderlei Vorzeichens vorkommen, tritt gegen die Aufladung durch die negativen Ionen in dem weitaus größeren Teil des übrigen Raumes im allgemeinen zurück — praktisch macht sich allerdings bei manchen Staubarten eine starke Verkrustung der Ausströmer sehr störend bemerkbar<sup>4)</sup>, die auf positiver Aufladung des Staubes innerhalb der Glimmschicht oder auf Polarisationswirkung des inhomogenen Feldes beruht, deren nähere Untersuchung jedoch an dieser Stelle nicht erfolgen soll. Hier

1) Vgl. R. Seeliger, a. a. O., spez. Fig. 1.

2) Vgl. H. Rohmann, Ztschr. f. Phys. 17. S. 253. 1923, der daselbe Problem (ohne Berücksichtigung der übrigens nicht wesentlichen Bildkraft) behandelt, ohne jedoch die Frage zu untersuchen, ob die so berechnete Maximalladung ausreicht, die Abscheidung der Staubteilchen bei der EGR. zu erklären.

3) Vgl. R. Seeliger, a. a. O., S. 64.

4) Vgl. z. B. V. Kohlschütter u. J. L. Tüscher, Ztschr. f. Elektrochem. 27. S. 225. 1921; R. Seeliger, a. a. O., S. 55.

werde also die maximale Aufladung der Schwebeteilchen berechnet, die dann eintritt, wenn die abstoßende Kraft des aufgeladenen Teilchens auf ein gleichgeladenes Ion der Kraft des elektrischen Feldes auf dieses Ion das Gleichgewicht hält.<sup>1)</sup> Dabei muß, wie Rohmann (a. a. O.) zeigte, die dielektrische Polarisierung berücksichtigt werden, durch die ein Teilchen der Dielektrizitätskonstante (DK.)  $\delta$  das homogene Feld in der Nähe der Kugel abändert.<sup>2)</sup> Die äußere Kraft an dem Punkt der Kugeloberfläche, an dem die nach dem Kugelmittelpunkt zielende Kraft die Oberfläche trifft, hat dann den Wert<sup>3)</sup>

$$X \left[ 1 + 2 \frac{\delta - 1}{\delta + 2} \right] = \varkappa X,$$

und die Kraft des  $n$ -fach aufgeladenen Teilchens und des äußeren Feldes auf ein gleichsinnig einfach geladenes Ion an diesem Punkt wird, wenn  $\varepsilon$  die Elementarladung bedeutet:

$$F = \varkappa \varepsilon X - \frac{n \varepsilon^2}{\varrho^2}.$$

Mit wachsender Ladung  $n$  nimmt  $F$  ab und wird Null, wenn die Ladung den Grenzwert

$$(1) \quad n_m \cdot \varepsilon = \varkappa X \varrho^2$$

erreicht hat.

Die Kraft des „elektrischen Bildes“, das ein herankommendes Ion im Teilchen erzeugt, holt die Ionen noch aus einer gewissen Entfernung an das Teilchen heran, in der es ohne Wirkung der Bildkraft die abstoßende Wirkung des gleichsinnig geladenen Teilchens überwiegen würde. Dadurch wird die tatsächlich erreichte maximale Ladung noch größer als  $n_m$ . Wie die etwas komplizierte Durchrechnung zeigt, kommt diese Wirkung der Bildkraft praktisch nur für sehr kleine Teilchen zur Geltung ( $\varrho < 3 \cdot 10^{-5}$  cm); gerade bei diesen Teilchen aber ist die Aufladung durch die unregelmäßige Wärmebewegung der Gasionen unter den Stromverhältnissen,

1) Die Feldkraft und die Coulombsche Kraft überwiegen praktisch weitgehend die Gradientkraft des inhomogenen Feldes auf ein polarisiertes Teilchen (vgl. R. Seeliger, a. a. O.).

2) Eine Zusammenstellung der DK.-Werte der für die EGR. wichtigsten Substanzen findet sich bei R. Seeliger, a. a. O., S. 53.

3) Vgl. etwa M. Abraham, Lehrb. d. Elektrizität (9. Aufl.) I. S. 132.

wie sie bei der EGR. herrschen, wesentlich größer als die eben behandelte Aufladung durch die Wirkung des elektrischen Feldes<sup>1)</sup> (vgl. §§ 4 u. 5). Es erübrigt sich darum, hier auf die Wirkung der Bildkraft näher einzugehen.

Für die praktische Berechnung der maximalen Ladung nach Gl. (1) muß die Feldstärke  $X$  im Entladungsraum bekannt sein. Diese ist im rein statischen Fall eines Zylinderkondensators bei gegebener Spannungsdifferenz zwischen axialem Draht und Zylinderwand ohne weiteres angebar; fließt ein Strom von der Stärke  $i$  pro Zentimeter Draht zur Wand, so wird durch die Wirkung der Raumladung der Abfall der Feldstärke vom Draht zur Wand erheblich beeinflußt und kann angenähert auf bekannte Weise berechnet werden:

Ist in der Achse eines Zylinders vom Radius  $R_0$  ein Draht vom Radius  $r_0$  ausgespannt und auf ein so hohes negatives Potential geladen, daß ein Strom von der Stärke  $i$  pro Zentimeter Draht zur Wand fließt, so kann man nach Townsend<sup>2)</sup> die kritische „Anfangsfeldstärke“  $\bar{X}$  in CGS.-Einheiten an der Oberfläche des Drahtes in Luft normaler Dichte angenähert nach der Formel

$$(2) \quad \bar{X} = 103 + 31,8 \sqrt{\frac{1}{r_0}}$$

berechnen, und die Feldstärke  $X$  im Abstände  $x$  vom Draht folgt aus der Gleichung

$$X^2 = \left( \bar{X} \frac{r_0}{x} \right)^2 + \frac{2i}{u} \left( 1 - \frac{r_0^2}{x^2} \right),$$

wenn  $u$  die Beweglichkeit der Ionen bedeutet. Ist ferner  $f$  ihre Dichte, also

$$(3) \quad i = 2\pi x u f X,$$

so wird bei genügend kleinen Werten von  $i$ , nämlich wenn

$$\frac{2i}{u} \equiv a \text{ klein gegen } \bar{X}^2 \text{ ist,}$$

$$(4) \quad X = \frac{1}{x} \sqrt{\bar{X}^2 r_0^2 + a x^2} = \frac{1}{x} \sqrt{C + a x^2}.$$

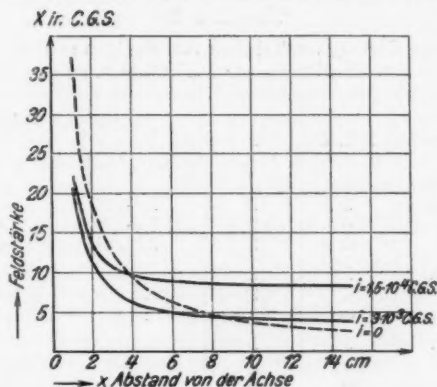
Für  $r_0 = 0,1$  cm findet man  $\bar{X} = 204$  CGS., und bei den oben angegebenen Stromstärken von 0,1 bzw. 0,5 mA pro Meter Draht ( $i = 3 \cdot 10^3$

1) Wenigstens bei den praktisch wirksamen Feldstärken.

2) Vgl. z. B. J. J. Thomson, *Conduction of electricity through gases*, 2. ed. 1906. S. 502; J. S. Townsend, *Phil. Mag.* 28. S. 83. 1914; O. W. Schumann, *Elektrische Durchbruchfeldstärke in Gasen* (Verlag: Springer 1923), S. 81 ff.; R. Seeliger, a. a. O., S. 60 ff.

bzw.  $1,5 \cdot 10^4$  el. stat. E. pro Zentimeter Draht) und bei einem Werte<sup>1)</sup>  
 $u = 500$  CGS., wird  $a \equiv \frac{2i}{u} = 12$  bzw. 60, so daß die Bedingung  $a \ll \bar{X}$   
 tatsächlich erfüllt ist.<sup>2)</sup>

Die unter diesen Voraussetzungen nach Gl. (4) berechneten Werte  
 der Feldstärke  $X$  sind in CGS.-Einheiten in Abhängigkeit vom Abstand  $x$   
 vom Draht in Fig. 3 eingetragen<sup>3)</sup>; aus den gezeichneten Kurven ersieht



Theoretischer Abfall der Feldstärke  $X$  im Zylinderkondensator  
 ohne und mit Strom  $i$  ( $i$  in el. stat. E. pro Zentimeter Draht)

Fig. 3

man, daß man in gewisser Annäherung im größeren Teil des zylindrischen  
 Raumes bei den angegebenen Stromdichten mit einer mittleren Feldstärke  
 von etwa 5 bzw. 10 CGS. (also 1500 bzw. 3000 Volt/cm) rechnen kann.<sup>4)</sup>

1) Hierbei ist vorausgesetzt, daß unter den üblichen Verhältnissen  
 der EGR. (Feldstärke, Luftdichte, Feuchtigkeit usw.) die negativen Elek-  
 trizitätsträger auf dem größten Teil des Weges Molekülonen und nicht  
 freie Elektronen sind. Bei größeren  $u$ -Werten wird  $a$  noch kleiner  
 und die obige Ungleichung ist erst recht erfüllt.

2) Der in der Praxis häufig eintretenden Verunreinigung und Ver-  
 krustung der Sprühdrahte ist durch Wahl der unteren Grenze der  
 Stromstärke (0,1 mA pro Meter) bereits Rechnung getragen.

3) Vgl. auch z. B. Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. VI, a. a. O.,  
 S. 437, Fig. 285.

4) Die Anwesenheit von Staubteilchen bewirkt erfahrungsgemäß  
 bei großer Staubdichte eine wesentliche Verringerung des Stromes  $i$  bei  
 gleicher angelegter Spannung — wahrscheinlich deshalb, weil die Staub-  
 teilchen einen großen Teil der Ionen abfangen und weil die geladenen  
 Staubteilchen eine wesentlich geringere Beweglichkeit besitzen als die  
 Luftionen.

In der folgenden Tab. 1 sind die nach Gl. (1) berechneten maximalen Ladungszahlen  $n_m$  für die eben angegebenen Werte von  $X$ , für die Werte  $z = 1, 2$  und  $3$  und für den für die EGR. wichtigen Bereich der Teilchengröße ( $\varrho = 1 \cdot 10^{-3}$  bis  $1 \cdot 10^{-5}$  cm) zusammengestellt.

Tabelle 1

Maximalladungszahlen  $n_m$  von Teilchen vom Radius  $\varrho$  und der DK.  $\delta$  unter Einwirkung der Feldstärke  $X$ .<sup>1)</sup>

Teilchenradius $\varrho$	DK. $\delta$	$z$	Maximalladungszahl $n_m$	
			für $X = 5$	für $X = 10$
$1 \cdot 10^{-3}$ cm	1	1	$1,1 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^4$
	4	2	$2,1 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^4$
	$\infty$	3	$3,2 \cdot 10^4$	$6,3 \cdot 10^4$
$3 \cdot 10^{-4}$ cm	1	1	940	1880
	4	2	1880	3760
	$\infty$	3	2720	5540
$1 \cdot 10^{-4}$ cm	1	1	105	210
	4	2	210	420
	$\infty$	3	315	630
$3 \cdot 10^{-5}$ cm	1	1	9	19
	4	2	19	38
	$\infty$	3	23	55
$1 \cdot 10^{-5}$ cm	1	1	1	2
	4	2	2	4
	$\infty$	3	3	6

#### § 4. Die Aufladung infolge der unregelmäßigen Wärmebewegung der Gasionen

Unserem Programm gemäß betrachten wir nunmehr die Aufladung der Schwebeteilchen im *feldfreien* Raum, lediglich infolge der unregelmäßigen Wärmebewegung der Ionen, die auf die Teilchenoberfläche auftreffen und mindestens zu einem gewissen Bruchteil haften bleiben. Dieses Diffusionsproblem ist von Deutsch und in anderer Weise von Arendt und Kallmann in den bereits mehrfach zitierten Arbeiten behandelt

1) Bei Teilchen vom Radius  $\varrho \sim 10^{-5}$  würde die hier nicht berücksichtigte Bildkraft die Maximalladung noch vergrößern (vgl. Seite 873/874).



worden<sup>1)</sup>, so daß wir uns hier auf eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeiten beschränken können.

Man kann in diesem Fall nicht ohne weiteres von einer Maximalladung sprechen, die die Schwebeteilchen aufnehmen; vielmehr hängt die erreichte Aufladung wesentlich von der Zeit ab, die die Teilchen im ionisierten Raum zubringen; allerdings wird der asymptotisch erreichte Maximalwert der Ladung nach Kallmann zum größeren Teil in sehr kurzer Zeit und um so rascher erreicht, je größer die Ionendichte ist. Angenommen, es sei bereits annähernd der stationäre Endzustand erreicht, bei dem infolge einer relativ hohen Ladung des Teilchens die Ionendichte in seiner Nähe entsprechend abgeändert und der auf das Teilchen fließende Strom auftreffender Ionen demgemäß gebremst ist; die Ladung des Teilchens sei also nicht mehr weit von ihrem Maximalwert entfernt. Dann ist nach Arendt und Kallmann:

$$(5) \quad e \cdot \frac{dn}{dt} \left( 1 + \frac{x c \varrho^2}{n u e} \right) = 4 \pi \varrho^2 x c f e^{-\frac{n e^2}{2 k T}}.$$

Diese Gleichung gilt ableitungsgemäß nur für einen relativ kleinen Wert der Aufladegeschwindigkeit, wie er nach einer gewissen Verweilzeit des Teilchen im Ionenfelde herrscht; ferner bedeutet  $x$  den Bruchteil der auftreffenden Ionen, der am Teilchen haften bleibt,  $c$  ist ein Maß der Geschwindigkeit der Ionen

$$c = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 k T}{m}},$$

$m$  die Ionenmasse,  $T$  die absolute Temperatur,  $\varrho$  der Teilchenradius,  $u$  die Ionenbeweglichkeit,  $f$  die ungestörte Ionendichte in großer Entfernung vom Teilchen. Die nähere Diskussion der Gl. (5) zeigt, daß, wenn man einen Zeitpunkt betrachtet, bei dem die Aufladegeschwindigkeit  $dn/dt$  bereits gering geworden ist, die zugehörige Ladung nicht mehr wesentlich von  $dn/dt$  abhängt.

Maßgebend für die erreichte Grenzladung ist in erster Linie der Teilchenradius  $\varrho$ , und zwar steigt die Grenzladung nahe proportional dem Radius; mit der Ionendichte wächst die Grenzladung nur langsam, immerhin nimmt sie erheblich zu, wenn die Ionisation beispielsweise

1) W. Deutsch, Ann. d. Phys. 80. S. 335. 1922; Ztschr. f. techn. Phys. 6. S. 423. 1925; spez. S. 431 ff., Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. VI. S. 438 ff. 1928; P. Arendt u. H. Kallmann, Ztschr. f. Phys. 35. S. 421. 1926; vgl. auch die Untersuchung von F. v. Hauer, Ann. d. Phys. 61. S. 303. 1920, sowie R. Seeliger, a. a. O., S. 64 ff. (wo besonders die Zeit berechnet wird, in der die Teilchen eine bestimmte Ladung aufnehmen).

von  $f = 500 \cdot s$  (wie sie etwa durch schwache  $\alpha$ -Strahlung erzeugt werden kann) auf  $f \sim 5 \cdot 10^8 s$  gesteigert wird. Letzterer Wert entspricht etwa dem uns hier interessierenden Fall des Spitzenstroms und der Corona-entladung, wie man aus den Gl. (3) und (4) des § 3

$$f = Ns = \frac{i}{2\pi u x X} = \frac{i}{2\pi u \sqrt{C + ax^2}}$$

mit den dort angegebenen Zahlenwerten leicht berechnen kann.

Die für verschiedene Teilchengrößen, verschiedene Iondichten und verschiedene Aufladegeschwindigkeiten errechneten Grenzladungen sind in Tab. 2 der eingangs zitierten Arbeit von H. Schweitzer zusammengestellt.<sup>1)</sup> Hierbei ist  $x = 1$  angenommen, da die Versuche von Arendt und Kallmann lehren (vgl. § 6), daß wenigstens bei den von ihnen untersuchten Ionendichten nur unter der Annahme  $x = 1$  die gefundenen Ladungen mit den berechneten übereinstimmen, d. h. also, daß alle auftreffenden Ionen an den Teilchen wirklich haften bleiben. Bei kleineren Werten von  $x$  würden natürlich auch kleinere Grenzladungen entstehen.

Wie jene Tabelle zeigt, ist der Einfluß der Ionisation bei einer Variation im Verhältnis 40:1 nicht groß: z. B. findet man für Teilchen von  $3 \cdot 10^{-5}$  cm Radius bei  $\frac{f}{s} = 10 \cdot 10^8$  bzw.  $0,25 \cdot 10^8$  Grenzladungen von 99 bzw. 80 Einheiten. Auch die Änderung der Aufladegeschwindigkeit macht nicht allzuviel aus, wenn sie erst unter einen gewissen Betrag gesunken ist. Als Maß dieser Geschwindigkeit eignet sich der Wert  $y = \frac{1}{n} \frac{dn}{dt}$ , so daß  $y = 10^{-2}$  bedeutet, daß sich die erreichte Ladung in 1 Sek. noch um 1 Proz. ändert. Als kleinste Aufladegeschwindigkeit ist bei der Rechnung der Wert  $y = 10^{-5}$  benutzt, das bedeutet z. B. bei  $\rho = 3 \cdot 10^{-6}$  cm, wo sich  $n \sim 95$  ergibt, daß sich diese erreichte Grenzladung in einer *Stunde* nur um drei Einheiten vermehrt. So kleine Aufladegeschwindigkeiten werden in der Praxis der EGR. kaum noch in Betracht kommen, da sich die Schwebeteilchen nur wenige Sekunden lang in der EGR.-Kammer aufhalten (vgl. § 5). Hier wird man vielleicht mit einem  $y$ -Wert  $\sim 10^{-2}$  zu rechnen haben, so daß bei

1) Ann. d. Phys. (5) 4. S. 33. 1930.

$\varrho = 3 \cdot 10^{-5}$  cm  $n \sim 60$  und  $\frac{dn}{dt} \sim 0,6$  pro Sekunde ist. Die dieser Aufladegeschwindigkeit entsprechenden Grenzladungen, die im folgenden mit  $n_g$  gekennzeichnet werden sollen, ergeben sich nahe proportional  $\varrho$ , und zwar ist bei  $\frac{f}{\delta} \sim 5 \cdot 10^8$  das Verhältnis  $n_g/\varrho$  im Mittel  $\sim 20 \cdot 10^5$ : für  $\varrho = 1 \cdot 10^{-5}$  cm ergibt sich  $n_g = 19$  und für  $\varrho = 1 \cdot 10^{-3}$  cm,  $n_g = 21 \cdot 10^2$  (vgl. auch die unten folgende Tab. 2, S. 892).

Die Ergebnisse der Rechnung von Deutsch stimmen mit den nach Kallmanns Theorie für  $y = 10^{-5}$  erhaltenen annähernd überein, wo  $\frac{n_g}{\varrho} \sim 30 \cdot 10^5$  ist.

Die im vorangehenden § 3 berechneten Werte  $n_m$ , die durch die aufladende Wirkung des elektrischen Feldes der EGR.-Kammer entstehen, waren dem Quadrate des Teilchenradius proportional und waren für Teilchen von  $\varrho = 1 \cdot 10^{-4}$  cm,  $\alpha = 2$  (DK.  $\delta = 4$ ) und bei einer Feldstärke  $X = 5$  CGS. etwa ebenso groß wie die  $n_g$ -Werte (vgl. Tab. 1 und 2) — für kleinere  $\varrho$  überwiegt  $n_g$ , für größere  $n_m$ . In „Wirklichkeit“ werden beide Ursachen, die treibende Kraft des Feldes und die Wärmebewegung, gleichzeitig bei der Aufladung der Schwebeteilchen wirksam sein — eine vollständige Theorie, die beide Ursachen erfassen müßte, ist jedoch sehr kompliziert, da das kugelsymmetrische Feld des Teilchens überlagert wird von dem linearen äußeren Felde, die Teilchen sich zudem unregelmäßig hin- und herbewegen und das äußere Feld keineswegs homogen ist, sondern durch das bewegte Teilchen selbst und durch die Ionisation verzerrt wird — ganz abgesehen von den einzelnen Glimmpunkten, den Ionenstrahlen und den durch sie erzeugten Wirbeln (vgl. hierzu Teil II unserer Untersuchungen).

Einfache Überlegungen gestatten bis zu einem gewissen Grade die Wirkung der beiden getrennt behandelten Aufladeursachen abzuschätzen: Im wesentlichen werden die Schwebeteilchen die größeren der beiden Ladungswerte annehmen; denn wenn  $n_m > n_g$  wird durch die Wärmebewegung der Ionen keine höhere Ladung auf die Teilchen übertragen werden und umgekehrt. Jedoch ist zu bedenken, daß in der Nähe der Glimmpunkte wesentlich schnellere Ionen und höhere Feldstärken vorkommen als im übrigen Raume; daher ist zu erwarten, daß unter den Ver-

hältnissen der EGR. einzelne Teilchen auch höhere Aufladungen erhalten können, als wir berechnet haben.

#### § 5. Experimentelle Untersuchungen der maximalen Aufladung von Schwebeteilchen

Die vorangehenden theoretischen Überlegungen sind durch eine Reihe experimenteller Untersuchungen geprüft und bis zu einem gewissen Grade bestätigt worden.

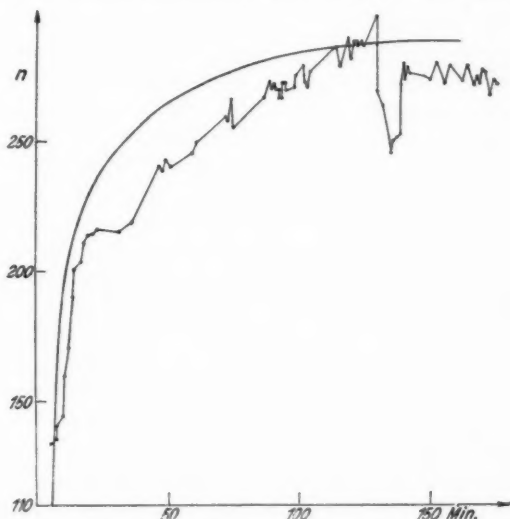
a) Erstens hat Rohmann<sup>1)</sup> durch eine originelle Methode die elektrische Aufladung strömender Staubeilchen gemessen, die von einem Spitzenstrom getroffen wurden und sich zugleich in einem starken homogenen elektrischen Felde befanden, so daß sie von ihrer Bahn abgelenkt wurden. Teilchen von der Größe  $\varrho = 1$  bis  $3 \cdot 10^{-4}$  cm erhielten nach seinen Angaben Ladungen, die den nach Gl. (1) berechneten Werten von  $n_m$  (bei einer Feldstärke von 7—8 CGS.) annähernd entsprachen; z. B. fand er bei einer Meßreihe bei Teilchen von  $1 \cdot 10^{-4}$  cm Radius 480 Ladungseinheiten, bei einer anderen Reihe allerdings nur 120, während Gl. (1), im ersteren Fall 513, im letzteren 550 liefert und der entsprechende  $n_g$ -Wert etwa 310 beträgt. Die zur Verfügung stehende Aufladezeit betrug nur Bruchteile einer Sekunde. Jedenfalls entstanden in dieser Zeit unter der gemeinsamen aufladenden Wirkung des elektrischen Feldes und der Wärmebewegung *nicht höhere* Ladungen als die Theorie für  $n_m$  oder  $n_g$  angibt.

b) Ferner hat P. Arendt, zunächst auf Veranlassung des Verfs., sodann unter Leitung von H. Kallmann Ladungsmessungen an Schwebeteilchen in einem geeignet abgeänderten Ehrenhaft-Millikan-Kondensator ausgeführt.<sup>2)</sup> Dieser war durch ein isoliertes Drahtnetz in 2 Hälften geteilt, die untere wurde mit  $\alpha$ -Strahlen ionisiert, und die Ionen eines bestimmten Vorzeichens wurden durch ein elektrisches Feld in die obere Hälfte getrieben, wo sie Öltröpfchen gleichsinnig aufluden und wo deren Größe und Ladung in bekannter Weise gemessen wurde. Das während der Aufladung wirksame elek-

1) H. Rohmann, a. a. O.

2) Vgl. P. Arendt, Dissert. Berlin, 1926; P. Arendt u. H. Kallmann, a. a. O.

trische Feld war so schwach ( $< 1$  CGS.), daß praktisch nur die in § 4 besprochene Wirkung der Wärmebewegung der Ionen für die Aufladung in Betracht kam und diese Theorie quantitativ geprüft werden konnte. Die durch die  $\alpha$ -Strahlen erzeugte Ionendichte variierte zwischen  $\frac{f}{s} = 515$  und 67 000,



Aufladung eines Schwebeteilchens vom Radius  $\varrho = 14,9 \cdot 10^{-5}$  cm bei einer Ionendichte von 87 000 (aus der ungedruckten Dissertation Arendt 1926)

Fig. 4

der Teilchenradius zwischen  $5 \cdot 10^{-5}$  und  $22 \cdot 10^{-5}$  cm. In diesen Grenzen wurde die oben angegebene Formel (5) (mit  $x = 1$ ) gut bestätigt (vgl. besonders Fig. 1 der zitierten Arbeit). Die einzelnen Teilchen wurden stets während längerer Zeiten (1—4 Std. lang) beobachtet, so daß sowohl der Gang der Aufladung wie deren Grenzwert für verschiedene Aufladegeschwindigkeiten bestimmt werden konnten.

Die hier reproduzierte, der Dissertation von Arendt entnommene Fig. 4 zeigt die allmähliche Aufladung<sup>1)</sup> eines

1) Der erste Teil des Aufladevorganges ist weder beobachtet noch nach Kallmanns Theorie berechenbar.

Teilchens von  $\rho = 14,9 \cdot 10^{-5}$  cm Radius bei der Ionendichte 67 000, die ausgezogene Kurve ist nach Kallmanns Theorie berechnet.

Beiläufig sei hier auf die in der Figur erkennbaren, z. T. erheblichen Umladungen der Teilchen hingewiesen, die schon bei den ersten Versuchen des Verf. über diesen Gegenstand festgestellt wurden, deren Ursache jedoch nicht einwandfrei aufgefunden werden konnte.<sup>1)</sup> Die naheliegende Annahme, daß diese Umladungen durch Ionen entgegengesetzten Vorzeichens erzeugt werden, wurde auf verschiedene Weise untersucht und scheint danach ausgeschlossen.<sup>2)</sup> Vielmehr handelt es sich vermutlich um „spontane“ Umladungen, vielleicht um ein Abreißen von Ionenkomplexen, das nur bei relativ hoher Aufladung und bei Anwesenheit vieler Ionen gleichen Vorzeichens etwa durch geeignete Zusammenstöße hervorgerufen wird.<sup>3)</sup>

Diese Entladungen stören jedoch die Bestimmung der Grenzladung nicht, und die unter den variierten Versuchsbedingungen erzielte Übereinstimmung mit der Theorie rechtfertigt bis zu einem gewissen Grade die Verwertung der theoretisch gewonnenen Formel zur Berechnung der Grenzladung auch bei anderer, speziell größerer Ionendichte, als bei Arendt-Kallmann verwendet wurde.

c) Trotzdem war es, besonders zum Verständnis der Vorgänge bei der EGR., wünschenswert die Aufladung von Schwebeteilchen in der Korona-Entladung direkt zu messen, wo ja nicht nur eine sehr starke Ionendichte, sondern außerdem erhebliche elektrische Felder vorhanden sind. Solche Messungen haben W. Deutsch<sup>4)</sup> und auf meine Veranlassung mit einer ähnlichen Anordnung H. Schweitzer<sup>5)</sup> und H. Sachsse ausgeführt.

1) Einzelheiten, vgl. Anhang u. Anm. 2, S. 438 der Arbeit Arendt-Kallmann.

2) Vgl. speziell Fig. 10, S. 440 der Arbeit Arendt-Kallmann.

3) Bei Schweitzers Versuchen (vgl. den folgenden Absatz c) wurden noch höhere Aufladungen der Schwebeteilchen als bei Arendt gemessen, trotzdem traten hier keine „spontanen“ Umladungen der Teilchen auf — vermutlich, weil der Beobachtungsraum nicht ionisiert war. Die Teilchen wurden vielmehr vor ihrem Eintritt in den Meßraum in dem Ionenfeld einer Korona-Entladung aufgeladen.

4) W. Deutsch, Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 623. 1926.

5) Hans Schweitzer, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 33. 1930.

Auf die Ergebnisse der Versuche von Deutsch kommen wir unten zurück.

Schweitzer benutzte, ähnlich wie Arendt und Deutsch, einen Ehrenhaft-Millikanschen Schwebekondensator mit einem Plattenabstand von 2 mm, in dessen obere Metallplatte eine EGR-Kammer sehr kleiner Dimension (Platinröhrchen von 2 mm Durchmesser) eingebaut war, die mit dem Beobachtungsraum des Kondensators durch einen feinen Schlitz von  $\frac{1}{10}$  mm Breite kommunizierte. Als Sprühdraht diente ein im Platinröhrchen axial ausgespannter Wollanstdraht, dessen mittlerer Teil von  $1\frac{1}{2}$  mm Länge auf  $7\mu$  abgeätzt war. Durch das Platinröhrchen konnten kleine Öltröpfchen in langsamen Strom durchgesaugt werden. Legt man für Bruchteile einer Sekunde negative Spannung von 800—1200 Volt an den axialen Draht, so bilden sich am Draht — wie man bei geeigneter Anordnung im Dunkeln sehen kann — ein oder mehrere Glimmpunkte, und es fließt ein schwacher Strom von 1—2 Mikroampere vom Draht zum Röhrchen. In dieser Korona-Entladung werden die Öltröpfchen aufgeladen und schießen durch den schmalen Schlitz in den Beobachtungsraum des Plattenkondensators, wenn in diesem ein geeignetes schwaches elektrisches Feld herrscht.<sup>1)</sup> In diesem Kondensator kann dann die Größe und Ladung der Teilchen in bekannter Weise gemessen werden.

So wurden Öltröpfchen von der Größe  $\varrho = 2-6 \cdot 10^{-5}$  cm untersucht. H. Sachsse hat diese Versuche auf größere Teilchen (bis  $4 \cdot 10^{-4}$  cm) und auf Teilchen aus anderem Material ausgedehnt. Er benutzte größere Versuchskammern als Schweitzer (Plattenabstand 8 bis 30 mm) und erzeugte die Korona-Entladung in einem Glasrohr, das auf die obere, mit variablem Schlitz versehene Kondensatorplatte aufgesetzt war, an einem dem Schlitz parallelen bis auf wenige Millimeter Länge gut isolierten Draht von 0,5—1 mm Durchmesser, der mit einem Gleichrichteraggregat nach Dessauer-Brenzinger auf geeignete negative Spannungen bis 20 kV aufgeladen werden konnte. Der Strom der Korona-Entladung wurde zwischen 1 und  $15 \cdot 10^{-6}$  Amp. variiert, wobei sich ein oder mehrere Glimmpunkte am Draht ausbildeten.

Die Meßergebnisse von Schweitzer und von Sachsse an Öltröpfchen sind in den Figg. 5—11 dargestellt, Abszisse ist in den Figg. 5, 6 und 8 der Radius der Teilchen in Einheiten von  $10^{-5}$  bzw.  $10^{-4}$  cm, Ordinate ist die gemessene Anzahl der Elementarladungen; außerdem ist auf der Abszisse die Fallgeschwindigkeit  $v_g$  der Teilchen zugehöriger Größe im Erdfeld, auf der Ordinate die elektrische Beweglichkeit

1) Bezüglich der hierbei auftretenden Störungen und der erforderlichen Vorsichtsmaßregeln, sowie bezüglich aller Einzelheiten vgl. die ausführlicheren Angaben in der genannten Arbeit von Schweitzer.

$\frac{v_g + v_E}{E}$  eingetragen, die die auf der ausgezogenen Kurve liegenden Teilchen im Feld  $E = 300$  Volt/cm besitzen.<sup>1)</sup> Diese ausgezogenen Kurven sind nach der quadratischen Formel (1) aus § 3 ( $n_m$  proportional  $\varrho^2$ ) gezeichnet, die Gerade der Fig. 5 entspricht der linearen Formel der Kallmannschen Theorie ( $n_g$  proportional  $\varrho$ ). Die in Fig. 5 und in Fig. 6 dargestellten Messungen sind bei kleiner Stromstärke der Korona-Entladung ( $i \sim 1 \cdot 10^{-6}$  Amp.) gewonnen. In Fig. 7 sind dieselben Teilchen dargestellt, aber hier ist die elektrische Beweglichkeit<sup>2)</sup> als Funktion der Fallgeschwindigkeit auf-

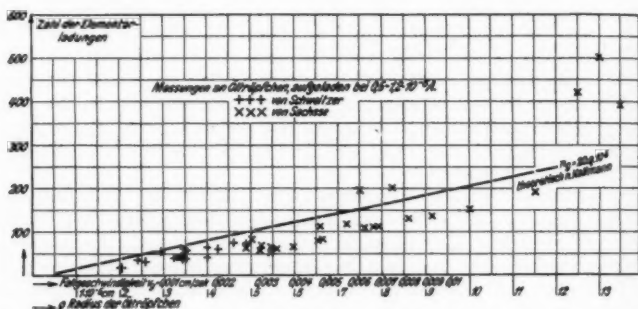


Fig. 5

getragen, um einen besseren Vergleich mit den nicht kugelförmigen Teilchen (Figg. 9—11) zu ermöglichen.

Wie man aus der Fig. 5 ersieht, steigen die Ladungen der *kleinen* Teilchen, deren Radius  $\varrho$  unter etwa  $1 \cdot 10^{-4}$  cm liegt, nahe linear mit  $\varrho$  an und liegen zum großen Teil etwas unterhalb der eingezeichneten Geraden  $n_g = 20 \cdot 10^5 \cdot \varrho$ ,

1)  $v_E$  ist die im elektrischen Felde  $E$  (CGS.) gemessene Steiggeschwindigkeit, also ist nach Stokes bei kugligen Teilchen die elektrische Beweglichkeit

$$\frac{v_g + v_E}{E} = \frac{n_g}{6 \pi \eta \varrho} = \frac{n}{\varrho} \cdot 1,4 \cdot 10^{-7}.$$

2) Übrigens hat E. Wasser an submikroskopischen Teilchen, die durch photoelektrischen Effekt aufgeladen wurden, Ladungen bis  $9 \cdot 10^5 \cdot \varrho \cdot e$  gefunden (vgl. Ztschr. Physik 27. S. 216. 1924).



die aus der Kallmannschen Theorie für eine Ionendichte  $f/\varepsilon = 5 \cdot 10^8$  und einer Aufladegeschwindigkeit  $\frac{dn}{dt} = n \cdot 10^{-2}$  berechnet ist (vgl. § 4).

Die für größere Teilchen,  $\varrho \geq 1 \cdot 10^{-4}$  cm, gefundenen Ladungen wachsen, wie man besonders aus Fig. 6 sieht, zweifellos rascher als  $\varrho$ , angenähert proportional  $\varrho^2$ , und werden zum größeren Teil durch die ausgezogene Kurve  $n_m = 21 \cdot 10^9 \cdot \varrho^2$  dargestellt<sup>1)</sup>, die der Formel (1) § 3  $n_m = \frac{\kappa X \varrho^2}{\varepsilon}$  mit  $X = 6,3$  CGS. und  $\kappa = 1,57$  entspricht — es war ja

$$\kappa = 1 + 2 \frac{\delta - 1}{\delta + 2}$$

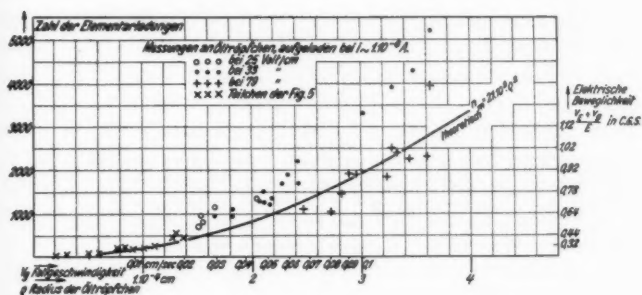


Fig. 6

und die Dielektrizitätskonstante  $\delta$  der Öltröpfchen ist 2,2; die Feldstärke 6,3 ist etwas größer als der „mittlere“ Wert 5, den wir in § 3, Tab. 1 (vgl. auch Fig. 3) mit Berücksichtigung der Raumladung für einen gleichförmig längs des axialen Drahtes im Zylinderkondensator verteilten Strom von 0,1 mA pro Meter Draht angenommen haben. Bei einem solchen Strom der Koronaentladung eines negativ geladenen Drahtes kommen, wie unsere im II. Teil unserer Untersuchungen zu besprechenden Versuche zeigen werden, im Durchschnitt  $1-2 \cdot 10^{-6}$  Amp. auf den einzelnen

1) Auch die für kleinere Teilchen ( $\varrho < 10^{-4}$  cm) gemessenen Ladungen weichen nicht weit von der ausgezogenen Kurve  $n_m = 21 \cdot 10^9 \cdot \varrho^2$  ab.

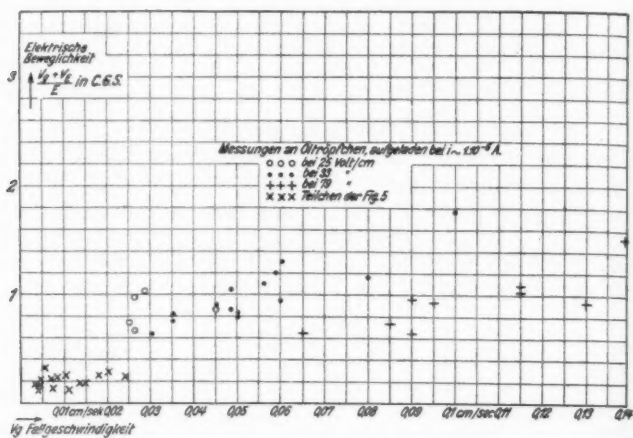
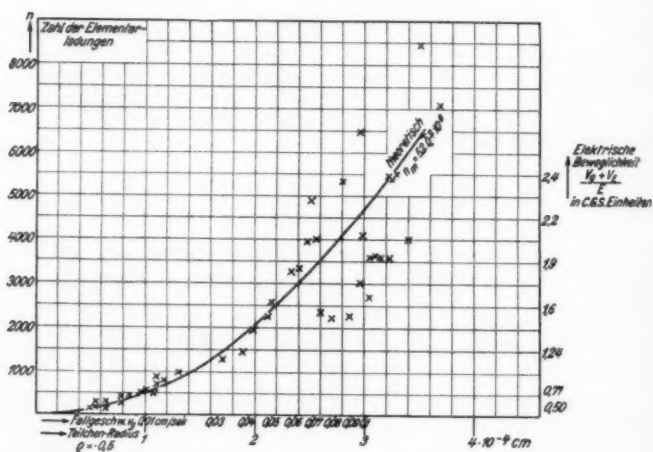


Fig. 7



Messungen an Öltröpfchen, aufgeladen bei  $i \sim 8-15 \cdot 10^{-6} A$ .

theoretische Kurve:  $n_m = 52 \cdot q^3 \cdot 10^9$  ( $X = 15,6$  c.g.s.  $z = 1,57$ )

Fig. 8

Glimmpunkt. Bei den eben beschriebenen Messungen floß ein Strom von  $1 \cdot 10^{-6}$  Amp. vom Draht über einen Glimmpunkt zur Wand. Dabei ist zu bedenken, daß die Feldstärke der Korona-Entladung in der Nähe des Drahtes von höheren zu kleineren Werten rasch absinkt, wie Fig. 3 zeigt; daher ist zu erwarten, daß die in verschiedenem Abstand vom Glimmpunkt aufgeladenen Teilchen auch verschieden hohe Ladung tragen. Dementsprechend zeigen die in den Figuren dargestellten Meßpunkte zum Teil erhebliche Streuung. Die überwiegende Mehrzahl der beobachteten Teilchen liegt annähernd auf der theoretisch berechneten Kurve.

Außer diesen sind — zunächst bei kleinen Teilchen ( $\varrho = 2 - 6 \cdot 10^{-5}$  cm) — auch einzelne wesentlich höhere Ladungen von Schweitzer beobachtet worden, die sogleich durch ihre rasche Bewegung im elektrischen Feld des Schwebekondensators auffielen. Die Ladungen dieser Teilchen, die bei Schweitzer (a. a. O.) in Tab. 2 zusammengestellt und in seiner Fig. 3 dargestellt, in unseren Figuren jedoch nicht eingezeichnet sind, sind 3—4 mal so groß als die „normale“ Ladung gleich großer Teilchen. Jedoch muß besonders betont werden, daß nur ein kleiner Bruchteil aller Teilchen, dessen Größe nicht sicher angegeben werden kann, solche extrem hohe Ladung trägt. Wie bei Schweitzer näher dargelegt, ist anzunehmen, daß diese Teilchen ihre abnorm hohe Ladung in unmittelbarer Nähe eines Glimmpunktes, wo ja viel größere Feldstärken als im übrigen Teil des Raumes herrschen, durch die dort vorhandenen extrem schnellen Elektronen oder Ionen erhalten haben. W. Deutsch hat in seiner oben zitierten Arbeit Zigarettenrauchteilchen untersucht und nur diese schnellsten, höchst geladenen Teilchen von  $2 - 6 \cdot 10^{-5}$  cm Radius gemessen. Die von ihm angegebenen Maximalwerte sind zum Teil von ähnlicher Größe wie die extrem hohen Ladungswerte, die Schweitzer fand, zum Teil übertreffen sie sie noch erheblich.<sup>1)</sup>

---

1) Schweitzer hat bei seiner Diskussion der Werte von Deutsch a. a. O. darauf hingewiesen, daß die Dichte der von Deutsch untersuchten Zigarettenrauchteilchen nicht bekannt gewesen sei, wodurch die Zuverlässigkeit der Messungen von Deutsch beeinträchtigt würde. Indessen haben wir durch eine diesbezügliche schriftliche Mitteilung

Auch bei den größeren, von Sachsse untersuchten Teilchen wurden Ladungswerte beobachtet, die merklich über dem Durchschnitt lagen; man kann die hochgeladenen Teilchen dadurch fassen, daß man kleinere Spannungen an die Platten des Kondensators legt; dann werden die niedriger geladenen Teile durch die Schwerkraft herausgezogen. In den Fig. 6 und 7 sind die bei kleinerer Spannung gemessenen Werte besonders durch Kreise (ooo) und Punkte (...) gekennzeichnet, und man sieht, daß diese in der Tat höhere Ladungen als die Mehrzahl der Teilchen besitzen. Man erkennt ferner, speziell aus Fig. 7, daß die kleinen Teilchen — bis etwa  $1 \cdot 10^{-4}$  cm Radius bzw. bis 0,02 cm/sec Fallgeschwindigkeit — eine von ihrer Größe unabhängige elektrische Beweglichkeit von etwa 0,2 cm/sec pro 300 Volt/cm besitzen; die größeren Teilchen erhalten jedoch 5—10 mal größere Beweglichkeit.

In Fig. 8 sind ferner die Ladungswerte der bei stärkerem Strom der Korona-Entladung ( $8-15 \cdot 10^{-6}$  Amp.) durch 2 bis 3 Glimmpunkte aufgeladenen Teilchen von  $0,5-4 \cdot 10^{-4}$  cm Radius dargestellt. Man sieht aus der Figur, daß diese Werte im ganzen Größenbereich nahe der ausgezogenen Kurve liegen, die der quadratischen Formel

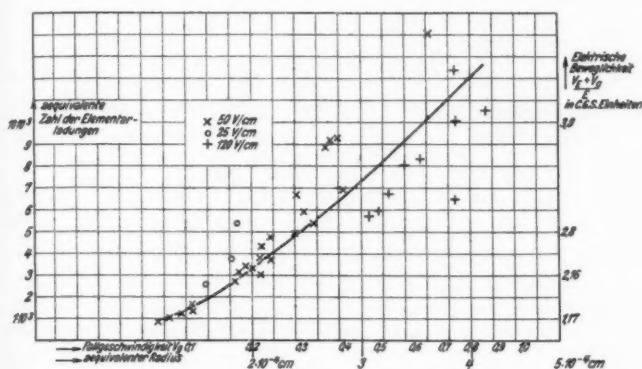
$$n_m = \frac{\pi X}{s} \rho^2 = 52 \cdot 10^9 \rho^2$$

entspricht. Der zugehörige Wert der Aufladefeldstärke  $X$  ist bei  $\kappa = 1,57$  (vgl. oben)  $X = 15,6$  — wir hatten in Tab. 1, § 3 bei einem gleichförmigen Strom  $i = 0,5$  mA pro Meter Draht mit einer „mittleren“ Feldstärke von 10 CGS. gerechnet; bei einem solchen Strom fließen nach besonderen Versuchen (vgl. Teil II) im Mittel etwa  $4 \cdot 10^{-6}$  Amp. durch einen ein-

von Hrn. Deutsch dessen oben zitierten Artikel im Handb. d. phys. u. techn. Mechanik Bd. VI, 1928 kennen gelernt und daraus ersehen, daß Deutsch diese Dichte pyknometrisch zu 1,07 bestimmt hat. Aber auch eine etwas andere Dichte der Teilchen würde die von Deutsch angegebene Gerade, die die Abhängigkeit der Ladung der untersuchten Teilchen von ihrem Radius darstellt, nicht ändern, weil sowohl Ladung wie Radius proportional der reziproken Wurzel aus der Dichte sind, wodurch der obige Einwand gegen die Meßergebnisse von Deutsch hinfällig wird. Trotzdem können wir bei unserer Diskussion die von Deutsch gefundenen extrem hohen Ladungen außer Betracht lassen, da nur ein kleiner Bruchteil aller Teilchen solche Ladungen trägt.

zelenen Glimmpunkt, ähnlich wie bei den in Fig. 8 dargestellten Ladungsmessungen, so daß die wirksame Aufladefeldstärke von 15,6 CGS. wesentlich größer als die theoretisch berechnete „mittlere“ Feldstärke der idealisierten Korona-Entladung bei starkem Strom ist. Teilchen von mehr als  $2 \cdot 10^{-4}$  cm Radius z. B. erhalten also in der Korona-Entladung in der Zeit von weniger als 1 Sekunde mehrere tausend Elementarladungen, so wie wir nach Formel (1) berechnet hatten.

Schließlich können wir nun auch für nicht kuglige Teilchen auf Grund der von Sachsse an verschiedenen Stäuben

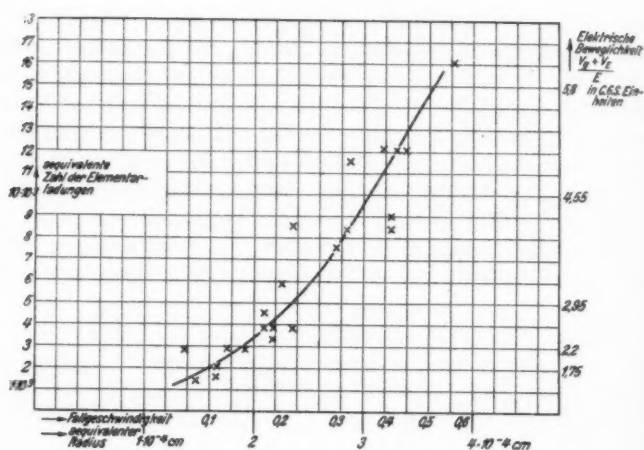


Messungen an ZnS-Teilchen.  $i \sim 4 - 8 \cdot 10^{-6}$  A.

Fig. 9

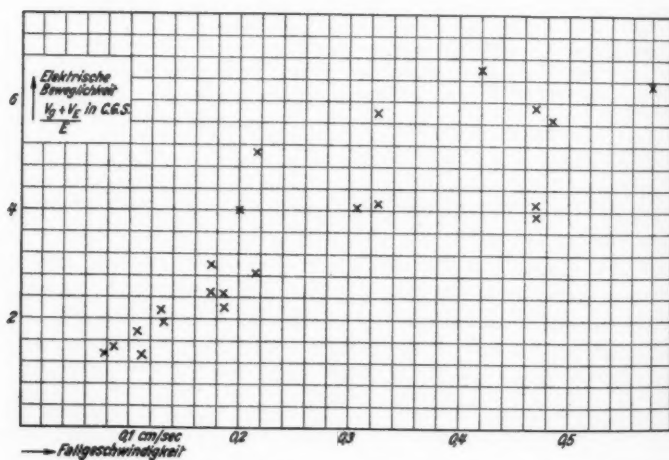
ausgeführten Ladungsmessungen<sup>1)</sup> bestimmte Aussagen machen. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in den Figg. 9 bzw. 10 u. 11 für ZnS- und für MgO-Teilchen dargestellt, die als feines Pulver untersucht wurden; die ZnS-Teilchen besitzen jedenfalls ein definiertes spezifisches Gewicht. Die in den Figg. 9 und 10 als Abszissen neben der Fallgeschwindigkeit  $v_g$  angegebenen „äquivalenten Radien“ sind die Werte, die kugelförmige Teilchen von gleichem spezifischen Gewicht bei gleicher Fallgeschwindigkeit besitzen würden; aus diesen Radien und

1) Diese Versuche hatten in erster Linie die Untersuchung der „natürlichen“ Ladung verschiedener Staubarten zum Ziel und werden später ausführlicher besprochen werden.



MgO.  $i \sim 4-8 \cdot 10^{-6}$  A.

Fig. 10



MgO.  $i \sim 4-8 \cdot 10^{-6}$  A.

Fig. 11

den beobachteten Steiggeschwindigkeiten  $v_E$  im angelegten elektrischen Felde  $E$  sind die „äquivalenten Ladungszahlen“ in der üblichen Weise berechnet und in den Figuren als Ordinaten eingetragen. Außerdem sind auf der Ordinatenachse die mittleren elektrischen Beweglichkeiten angegeben, die zu den auf der ausgezogenen Kurve liegenden Teilchen gehören. In Fig. 11 sind die elektrischen Beweglichkeiten der MgO-Teilchen als Ordinaten in ihrer Abhängigkeit von der Fallgeschwindigkeit aufgetragen, gerade wie es in Fig. 7 für die Öltröpfchen geschehen ist.

Die dargestellten Meßergebnisse zeigen, daß die Größenordnung der Ladungswerte dieselbe ist wie bei den kugelförmigen Öltröpfchen, die „äquivalenten“ Werte sind aber noch etwas größer als die wahren Ladungen von Öltröpfchen, deren Radius gleich dem „äquivalenten“ Radius der untersuchten Staubeilchen ist (vgl. Fig. 8 mit Figg. 9 u. 10).

Vergleicht man die zu gleicher Fallgeschwindigkeit  $v_g$  gehörigen Werte der elektrischen Beweglichkeit (notabene bei gleicher Stromstärke  $i$  der Korona-Entladung), so ergibt sich, daß die MgO- und ZnS-Teilchen annähernd dieselbe, vielleicht eine *etwas kleinere* elektrische Beweglichkeit besitzen als Öltröpfchen gleicher Fallgeschwindigkeit; z. B. gehört zur Fallgeschwindigkeit  $v_g = 0,1$  cm/sec beim Strom  $8-15 \cdot 10^{-6}$  Amp. eine elektrische Beweglichkeit der Öltröpfchen von etwa 2,3 CGS. (vgl. Fig. 8), dagegen ist beim Strom  $1 \cdot 10^{-6}$  Amp. ihre Beweglichkeit nur 0,9 CGS. (vgl. Fig. 7). Die MgO-Teilchen gleicher Fallgeschwindigkeit besitzen beim Strom  $4-8 \cdot 10^{-6}$  Amp. eine elektrische Beweglichkeit von etwa 1,8 CGS., ZnS-Teilchen eine Beweglichkeit von etwa 1,4 CGS. (vgl. Figg. 9 und 11).

Zusammenfassend können wir daher schließen, daß die in den §§ 3 und 4 entwickelten Überlegungen über die Aufladung von Schwebeteilchen im wesentlichen gut bestätigt sind.

#### § 6. Die Geschwindigkeit und die Abscheidezeit der geladenen Staubeilchen unter der Wirkung des elektrischen Feldes der Korona-Entladung

Wir kennen nunmehr mit gewisser Annäherung die Ladung, die Schwebeteilchen verschiedener Größe in der Coronaentladung aufnehmen, und kennen die Geschwindigkeit,

die sie in einem bestimmten elektrischen Felde erlangen. Wir können somit auch die mittlere Geschwindigkeit abschätzen, mit der sie sich im Felde der Korona-Entladung bewegen, und die Zeit, die sie brauchen, um z. B. vom Sprühdraht bis zur Wand des Abscheideraumes zu gelangen. Wir betrachten wieder eine zylindrische Kammer mit axialem Draht und berechnen zunächst die Geschwindigkeit der kugelförmig angenommenen Teilchen verschiedener Größe aus der Stokes'schen Formel<sup>1)</sup>

$$v = X \frac{n s}{6 \pi \eta q},$$

wobei wir für  $\eta$  die innere Reibung des Gases, den Wert der normalen Luft ( $1,8 \cdot 10^{-4}$  CGS.) und für  $X$ , die Feldstärke in

Tabelle 2

Teil- chen- radius	Maximalladungszahl		Mittlere Ge- schwindig- keit $\bar{v}$		Abscheidezeit $T$ in Sekunden				
	$n_m$ für $x = 2$ und für	$n_g$ für $f/\varepsilon = 5 \cdot 10^8$ und für $y = 10^{-2}$	für		für $x = r_0$ und		für $x = 5$ cm und		
			$X = 5$	$X = 10$	$i = 3 \cdot 10^3$	$i = 1,5 \cdot 10^4$	$i = 3 \cdot 10^3$	$i = 1,5 \cdot 10^4$	
									$\text{cm/sec}$
$q$ cm	$X = 5$	$X = 10$	$\text{cm/sec}$	$\text{cm/sec}$	$i = 3 \cdot 10^3$	$i = 1,5 \cdot 10^4$	$i = 3 \cdot 10^3$	$i = 1,5 \cdot 10^4$	
$1 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^4$	2100	15	59	1,0	0,27	0,8	0,2
$3 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^3$	$3,8 \cdot 10^3$	630	4,5	18	3,2	0,9	2,6	0,4
$1 \cdot 10^{-4}$	210	420	207	1,5	5,9	10	2,7	8,0	2,0
$3 \cdot 10^{-5}$	(19)	(38)	59	1,4	2,8	10	6	8,4	4,2
$1 \cdot 10^{-5}$	(2)	(4)	19	1,35	2,7	10,7	6	8,7	4,4

der Entladung, die Werte 5 und 10 CGS. wie in § 3 benutzen.<sup>2)</sup> Die berechneten Zahlen sind in Tab. 2 zusammengestellt. Für  $q \geq 10^{-4}$  cm sind die  $n_m$ -Werte der Tab. 1 (mit  $x = 2$ ) benutzt, für  $q < 10^{-4}$  cm die aus der Kallmannschen Theorie — für  $f/\varepsilon = 5 \cdot 10^8$  und  $y = 10^{-2}$  — berechneten Ladungen  $n_g \sim 20 \cdot q \cdot 10^5$ , also die jeweils größere Ladung, wie es den im vorangehenden Paragraphen besprochenen Versuchsergebnissen entspricht. Allerdings ergaben sich bei schwachem Strom ( $i \sim 10^{-6}$  Amp.) für diese kleinen Teilchen etwas kleinere

1) Über die Grenzen der Gültigkeit dieser Formel in der Korona-Entladung vgl. Seeliger, a. a. O. S. 55.

2) Dabei ist angenommen, daß die Teilchen ihre einmal erlangte Maximalladung im wesentlichen bei ihrer Wanderung beibehalten — die von uns bisweilen beobachteten spontanen Entladungen (vgl. § 5, S. 882) spielen praktisch keine große Rolle.



Ladungen, bei starkem Strom etwas größere. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß nach unseren Versuchen an nicht kugeligen Teilchen mit noch etwas größeren Ladungen und Geschwindigkeiten zu rechnen ist, wenn man deren „äquivalenten“ Radius gleich dem in Tabelle 2 angegebenen wahren Radius kugelliger Teilchen setzt.

Wie man aus der Tab. 2 ersieht, erhält man so für Teilchen unter  $10^{-4}$  cm Radius einen annähernd konstanten Wert der „Beweglichkeit“,  $\bar{v}/X \sim 0,3$  cm/sec pro 300 Volt/cm — die Messungen ergaben bei kleinem Strom sogar nur  $\sim 0,2$  CGS.; für  $\rho = 10^{-4}$  cm und  $X = 10$  CGS. wird  $\bar{v}/X \sim 0,6$ , und für Teilchen oberhalb  $10^{-4}$  cm ergeben sich noch wesentlich größere Beweglichkeiten: die für die kleineren Teilchen zur Rechnung benutzten  $n_g$ -Werte sind ja dem Radius  $\rho$  selbst proportional, die für die größeren Teilchen benutzten  $n_m$ -Werte dem Quadrat des Radius, und  $\bar{v}/X$  ist proportional dem Verhältnis  $n/\rho$ .

Die hier berechneten Geschwindigkeiten werden wir in Teil II mit den Geschwindigkeiten vergleichen, mit denen der elektrische Wind die Teilchen fortführt, und können dann dessen Einfluß beurteilen.

Deutsch berechnet in seiner bereits zitierten Arbeit<sup>1)</sup>, daß für Teilchen zwischen  $10^{-6}$  und  $10^{-3}$  cm Radius die elektrische Beweglichkeit nur wenig mit dem Radius ansteigt, nämlich von 0,35 nur auf 0,69 CGS.; dies Resultat rührt daher, daß er durchweg lediglich die durch die unregelmäßige Wärmebewegung der Ionen erzeugte Aufladung in Rechnung setzt (seine Grenzlادungen sind übrigens etwas größer als unsere  $n_g$ -Werte, vgl. S. 879) und die Wirkung des elektrischen Feldes bei Berechnung der Aufladung nicht berücksichtigt.

Für den Erfolg der Staubbiederschlagung ist offenbar die Zeit maßgebend, in der die Teilchen zur Zylinderwand gelangen — notabene falls sie an ihr hängen bleiben: dies ist sicherlich nur bei einem Bruchteil aller tatsächlich der Fall, in der Technik wird dies Hängenbleiben übrigens durch geeigneten Bau der Wände (Anbringen von Fangtaschen usw.)

1) Vgl. speziell Ztschr. f. techn. Phys. 6. S. 430. 1925, sowie Handb. d. Mechanik, Bd. VI, a. a. O., wo zugleich einige Versehen der älteren Arbeit (Ann. d. Phys. 68. S. 335. 1922) berichtigt sind.

begünstigt. Um einen mittleren Wert dieser Zeit  $T$  zu finden, nehmen wir an, daß die Teilchen mit der eben besprochenen Maximalladung von einem bestimmten Abstand  $x$  vom Draht an bis zum Abstand  $R_0$  — d. h. bis zur Wand — unter der Einwirkung der an jedem Ort herrschenden Feldstärke mit der dem Stokesschen Gesetz entsprechenden Geschwindigkeit wandern. So wird:

$$T = \int_x^{R_0} \frac{6 \pi \eta q}{n e X} dx = \frac{6 \pi \eta q}{n \cdot e} \int_x^{R_0} \frac{x dx}{\sqrt{C + a x^2}}$$

$$= \frac{6 \pi \eta q}{n e a} \left[ \sqrt{C + a R_0^2} - \sqrt{C + a x^2} \right].$$

Dabei ist für die Feldstärke  $X$  in ihrer Abhängigkeit von  $x$  der durch die Raumladung veränderte Wert (Gl. 4, vgl. a. Fig. 3) eingesetzt. Die gemäß dieser Formel für die verschiedenen Radien berechneten  $T$ -Werte sind in den letzten Reihen von Tab. 2 zusammengestellt; dabei wurde  $R_0 = 15$  cm angenommen, und für  $a$  wurden nahe dieselben Werte wie in § 4 benutzt ( $a = 13,3$  für  $i = 3 \cdot 10^3$  und  $a = 66,5$  für  $i = 1,5 \cdot 10^4$ ), für  $n$  die eben bei der Berechnung von  $\bar{v}$  verwendeten Maximalladungen<sup>1)</sup>, und für  $x$  wurde einmal der Drahtradius  $r_0 = 0,1$  cm und zweitens 5 cm eingesetzt; der letztere Wert hat darum Interesse, weil bei gleichmäßiger Verteilung der Teilchen über den Querschnitt des Rohres sich offenbar fast 90 Proz. aller Teilchen bei ihrem Eintritt in das Rohr in einem Abstand von mindestens 5 cm von der Achse befinden.

Wir kommen so zu der anfangs — am Schluß des § 2 — aufgeworfenen Frage; Sind die Zeiten, die die Teilchen in den Staubkammern der EGR. verweilen so groß, daß die Teilchen allein unter der Wirkung ihrer Ladung und des herrschenden elektrischen Feldes, ohne eine radial gerichtete Zusatzgeschwindigkeit — etwa infolge des elektrischen Windes — zur Wand gelangen können? Rechnet man mit einem Gasstrom von 1 m/sec und einem Rohr von 3 m Länge — d. s. praktisch häufig verwendete Dimensionen, bei denen vielfach eine gute Reinigung erzielt wird —, so stehen den Staubeilchen 3 Sek.

1) Dabei ist bei  $q = 10^{-8}$  und  $i = 3 \cdot 10^3$  konsequenterweise der  $X = 5$  entsprechende  $n_m$ -Wert und bei  $i = 1,5 \cdot 10^4$  der  $X = 10$  entsprechende  $n_m$ -Wert benutzt. Bei  $i < 10^{-4}$  sind die  $n_p$ -Werte verwendet.

zur Aufladung und zur anschließenden Abscheidung zur Verfügung. Nimmt man an, daß die Teilchen bei ihrem Eintritt in die Reinigungskammer sofort aufgeladen werden, so ersieht man aus Tab. 2, daß kugelige Teilchen von  $5 \cdot 10^{-4}$  cm Radius und darüber allein durch die elektrostatischen Kräfte des Feldes abgeschieden werden können, auch wenn sie in der Rohrachse eintreten ( $x = r_0$ ) und wenn die von den Teilchen aufgenommene Ladung nur  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{3}$  so groß wie die Maximalladung  $n_m$  ist, da die berechneten Minimalzeiten nur Bruchteile von Sekunden sind. Bei Teilchen von der Größe  $\rho = 10^{-4}$  cm und darunter kann man zweifelhaft sein, ob die Feldwirkung ausreicht<sup>1)</sup>, zumal die der Ausrechnung zugrunde gelegten Zahlen über die geometrischen und elektrischen Bedingungen z. T. nicht frei von Willkür und die Berechnungen daher mit beträchtlicher Unsicherheit behaftet sind. Immerhin kann man aus unseren Berechnungen (Tab. 2) und aus unseren experimentell gewonnenen Erfahrungen (vgl. besonders Figg. 5—8) entnehmen, daß im günstigsten Fall — nämlich bei starkem Strom und hoher Feldstärke im Entladungsraum<sup>2)</sup> — die aus Ladung und Feldstärke errechneten Wanderungszeiten zur Abscheidung ausreichen können, falls, wie angenommen, die Teilchen 3 Sek. im Gasreinigungsraum verweilen. Aber bei den praktisch meist wirksamen schwächeren Strömen und der entsprechend kleineren Aufladung wachsen die berechneten Wanderungszeiten eventuell auf 8—11 Sek. oder noch mehr. Außerdem war angenommen, daß die Teilchen sofort auf die angegebene hohe Ladung aufgeladen werden, wenn sie in den Apparat eintreten. Da nun die Ionenströme nicht gleichmäßig vom ganzen Draht ausgehen, sondern — wie mehrfach erwähnt — nur von einzelnen Punkten des Drahtes, den Glimmpunkten aus, kann bisweilen eine erhebliche Zeit vergehen, ehe

1) Vgl. dagegen W. Deutsch, Ztschr. f. techn. Phys. 6. S. 433. 1925; Handb. d. Mechanik Bd. VI, a. a. O., der die direkte elektrische Wirkung des Feldes auf die geladenen Teilchen für ausreichend hält, während R. Seeliger (Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 49. 1926, spez. S. 69—70) diese Frage offen läßt.

2) Die erfahrungsgemäß günstige Wirkung größerer Stromstärke beruht hiernach auf Vergrößerung der Aufladung der Schwebeteilchen — außerdem, wie wir im zweiten Teil sehen werden, auf Erhöhung der elektrischen Windgeschwindigkeit.

die Teilchen in einen solchen Ionenstrahl gelangen und aufgeladen werden. Hiernach scheint es, daß ohne eine durch den elektrischen Wind hervorgerufene Zusatzgeschwindigkeit die zur Verfügung stehende Zeit für die kleineren Teilchen und bei schwachen Strömen zur Abscheidung nicht ausreicht.

Andererseits stellt die Verweilzeit der Teilchen von 3 Sek. im Reinigungsapparat weder die untere noch die obere Grenze dar. Vielmehr werden bisweilen die Strömungsgeschwindigkeit des Gases kleiner und die Apparate länger gewählt, so daß die Staubteilchen längere Zeit als 3 Sek. in den Staubkammern verweilen, besonders dann, wenn „Feinreinigung“ bis auf 99 Proz. oder darüber erstrebt wird oder wenn es sich um schwer zu reinigende Gase handelt, die nur kleine Stromdichten zulassen. Bisweilen aber lehrt die Praxis, daß auch bei mehreren Metern Gasströmungsgeschwindigkeit und nicht besonders langen Apparaten gute Reinigung erzielt wird, wobei den Teilchen bedeutend weniger als 3 Sek. Verweilzeit zur Verfügung steht. In letzterem Fall würden nach Tab. 2 nur Teilchen über  $3 \cdot 10^{-4}$  cm Radius allein durch die unmittelbare elektrische Wirkung des Feldes ausreichende Geschwindigkeit erhalten, um abgeschieden zu werden. Die Abscheidung kleinerer Teilchen ist in diesem Fall nur durch eine zusätzliche Geschwindigkeit, eben durch die elektrischen Windströme, die Teilchen jeder Größe erfassen, verständlich.

Wir schließen daher, daß die Abscheidung größerer Teilchen des betrachteten Bereichs allein durch ihre hohe elektrische Ladung, die sie aus den Ionenströmen aufnehmen und durch die elektrische Kraftwirkung des Feldes der Korona-Entladung verstanden werden kann; daß es aber zum mindesten eine noch offene Frage ist, ob es gelänge, die wirklich beobachteten Abscheidungen der kleineren Teilchen zu erreichen, wenn ihnen nicht mechanische Ortsveränderungen durch den elektrischen Wind zu Hilfe kämen. Die endgültige Beantwortung dieser Frage soll dem II. Teil unserer Untersuchungen vorbehalten bleiben.

#### **Zusammenfassung der Ergebnisse über die Aufladung von Schwebeteilchen**

Die Aufladung von Schwebeteilchen von  $10^{-3}$  bis  $10^{-6}$  cm Radius in der Korona-Entladung eines negativ geladenen Drahtes

gegen eine geerdete Wand kann im Durchschnitt durch die Formel  $n_m \cdot \varepsilon = \kappa \cdot \varrho^2 X$  dargestellt werden; hier ist  $X$  die von der Stromstärke abhängige mittlere Feldstärke im Entladungsraum, die annähernd unter Berücksichtigung der Raumladung berechnet werden kann,  $n$  ist die Zahl der aufgenommenen Elementarladungen,  $\delta$  die DK. der Teilchen und  $\kappa = 1 + 2 \frac{\delta - 1}{\delta + 2}$ .

Bei kleiner Stromstärke ( $\sim 10^{-6}$  Amp. pro Glimmpunkt,  $\sim 10^{-4}$  Amp. pro Meter Draht) und infolgedessen relativ geringer Feldstärke im größeren Teil des Entladungsraums ist die Aufladung der kleinen Teilchen ( $\varrho \leq 10^{-4}$  cm) größer als jene Formel (mit  $X = 5$  CGS.) angibt und annähernd durch die Formel  $n_g = 20 \varrho \cdot 10^5$  darstellbar, die theoretisch aus der durch die Diffusion der Luftionen bewirkten Aufladung der Teilchen abgeleitet werden kann.

(Eingegangen 6. Februar 1930)

## *Die Struktur der Kapillarschicht von Dipolflüssigkeiten*

**Von H. F. Hertlein**

(Mit 5 Figuren)

### § 1. Literaturübersicht

Die Frage nach der Dicke von Kapillarschichten und dem Dichteverlauf in denselben erhebt sich hauptsächlich, seit v. d. Waals 1894 seine thermodynamische Theorie der Kapillarität veröffentlichte.<sup>1)</sup> Im Gegensatz zu den älteren statischen Theorien von Laplace und Gauss ist die Theorie von v. d. Waals auf thermodynamischer Grundlage aufgebaut. Er nimmt an, daß sich zwischen der homogenen Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampf eine Zwischenschicht erstreckt, in der der Übergang der Dichte zwischen den Werten im flüssigen und gasförmigen Zustande erfolgt. Das System homogene Flüssigkeit, Kapillarschicht, homogener Dampf muß sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Man wird so auf ein Gleichgewichtsproblem geführt, das sich mit Hilfe thermodynamischer Methoden prinzipiell sehr einfach lösen läßt. v. d. Waals benutzte dazu die Forderung, daß die freie Energie des Gesamtsystems ein Minimum sein muß. Nimmt man die Kapillarschicht zur Vereinfachung horizontal an und vernachlässigt man weiterhin den Einfluß der Schwerkraft, so kann man, wenn man eine  $z$ -Achse senkrecht zur Kapillarschicht annimmt, die Dichte als Funktion von  $z$  allein betrachten. Man erhält dann, wenn der Querschnitt senkrecht zur  $z$ -Achse gleich 1 gesetzt wird, als Gleichgewichtsbedingung:

$$\delta \int \varrho (U_1 - TS_1) dz = 0$$

---

1) v. d. Waals, Ztschr. f. phys. Chem. 13. S. 656. 1894.

mit der Nebenbedingung

$$\int \rho dz = \text{const.}$$

Diese beiden Integrale sind über das ganze Gefäß zu erstrecken. Dabei bedeuten  $\rho$  die Dichte,  $U_1$  und  $S_1$  die Energie bzw. Entropie der Substanz pro Gramm in dem betreffenden Querschnitt. Es ist nun zu beachten, daß in der Kapillarschicht sowohl  $U_1$  als auch  $S_1$  nicht durch die Dichte in dem betreffenden Punkt allein bestimmt sind, sondern auch von der Dichte in den Nachbarpunkten, d. h. von den Ableitungen der Dichte nach  $z$  abhängen. Diese Rechnung, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, wurde von v. d. Waals durchgeführt, allerdings nur für  $U$ , da er irrigerweise annahm, daß ein ähnlicher Einfluß für  $S$  nicht bestehe. Zur Berechnung von  $U_1$  muß ein bestimmtes Kraftgesetz zwischen den Molekülen zugrunde gelegt werden. v. d. Waals ließ diese Frage zunächst noch offen, und führte das Kraftgesetz in ganz allgemeiner Form in seine Theorie ein, mit der einen Einschränkung, daß die Kraft zwischen zwei Molekülen nur eine Funktion ihrer Entfernung  $r$  sein sollte. Die allgemeine Gültigkeit, welche die Theorie dadurch beanspruchen konnte, mußte allerdings mit der Unmöglichkeit ihrer numerischen Auswertung erkauft werden. Nur in der unmittelbarsten Nähe der kritischen Temperatur gelang es, unter Heranziehung der Zustandsgleichung, den Ausdruck für die Oberflächenspannung, der in einfacher Weise aus der Gleichgewichtsbedingung hervorgeht, etwas durchsichtiger zu gestalten.

In der Folge wurde die Theorie noch weiter ausgebaut. Hulshof<sup>1)</sup> zeigte, daß die v. d. Waalsschen Ergebnisse auch noch auf anderem Wege zu erhalten sind, und zwar, indem man die Differenz der Druckkomponenten normal und tangential zur Kapillarschicht über diese summiert. Dann ergibt sich also für die Oberflächenspannung:

$$\gamma = \int (p_n - p_{tg}) dz,$$

wo  $p_n$  und  $p_{tg}$  die Druckkomponente in normaler bzw. tangentialer Richtung zur Grenzschicht bedeuten. Die Richtigkeit

1) H. Hulshof, Ann. d. Phys. 4. S. 165. 1901.

dieses Ausdrucks läßt sich in einfacher Weise nachweisen.<sup>1)</sup> Die Berechnung der Oberflächenspannung gestaltet sich dann folgendermaßen: Bezeichnet  $P$  den thermischen oder Expansionsdruck,  $K$  den Kohäsionsdruck;  $p$  den äußeren Druck, so gilt die Beziehung:

$$P = K + p,$$

also für die normalen bzw. tangentialen Komponenten:

$$P_n = K_n + p_n$$

$$P_{tg} = K_{tg} + p_{tg}.$$

Unter der Annahme, daß  $P_n$  und  $P_{tg}$  in der Kapillarschicht denselben Wert besitzen, ist dann  $p_n - p_{tg} = K_{tg} - K_n$ , also die Oberflächenspannung

$$\gamma = \int (p_n - p_{tg}) dz = \int (K_{tg} - K_n) dz.$$

Die Kohäsionsdrucke  $K_{tg}$  und  $K_n$  lassen sich durch eine rein statische Betrachtung berechnen. Die Ausführung des Integrals liefert dann dieselben Ergebnisse, zu denen v. d. Waals in seiner Arbeit gelangt.

In einer größeren Anzahl von Arbeiten hat weiterhin Bakker die Theorie ausgebaut.<sup>2)</sup> Bezüglich seiner Arbeiten sei auf die zusammenfassende Darstellung im Handbuch der Experimentalphysik verwiesen, wo sich auch die diesbezüglichen Literaturangaben finden.

Vor kurzer Zeit hat ferner Dekker in einer größeren Arbeit noch verschiedene Korrekturen an der v. d. Waalsschen Theorie angebracht.<sup>3)</sup> Er zeigte, worauf schon v. d. Waals jun.<sup>4)</sup> hinwies, daß die Annahme, daß die Entropie in der Kapillarschicht nur von der Dichte in einem bestimmten Punkt abhängt, nicht richtig ist. Man sieht das unmittelbar ein, wenn man von der Boltzmannschen Beziehung

$$S = k \ln W$$

ausgeht, wo  $W$  die thermodynamische Wahrscheinlichkeit,  $k$  die Boltzmannsche Konstante bedeutet.  $W$  ist aufs engste

1) Vgl. Handbuch Wien-Harms Bd. 6. 20.

2) Vgl. Handbuch Wien-Harms Bd. 6.

3) J. W. Dekker, Ann. d. Phys. 82. S. 1077. 1927.

4) Vgl. Handbuch Geiger-Scheel Bd. 10. 216.



verknüpft mit dem für ein Molekül an der betreffenden Stelle verfügbaren Raum. Dieser hängt aber auch von den Ableitungen der Dichte nach den räumlichen Koordinaten an der betreffenden Stelle ab.

Berücksichtigt man diesen Umstand, so ergibt sich eine Korrektur der alten Werte, die Dekker in verschiedener Näherung bezüglich der gegenseitigen Überdeckung der Deckungssphären der Moleküle berechnet. Was die Hulshofsche Methode anbelangt, so wirkt sich die Korrektur dahin aus, daß man  $P_n$  und  $P_{tg}$  entgegen den Hulshofschsen Annahmen als verschieden betrachten muß. Auch diese Werte wurden von Dekker berechnet. Nach Anbringen dieser Korrektur liefern beide Methoden wieder dieselben Ergebnisse. Doch ist der Einfluß der Korrektur ziemlich gering.

## § 2. Die Kräfte zwischen Dipolmolekülen. Erste Annahme

Wie die vorstehenden Ausführungen gezeigt haben, ist die Berechnung des Dichteverlaufs in der Kapillarschicht sowie der Oberflächenspannung nur dann möglich, wenn ein bestimmtes Kraftgesetz zwischen den Molekülen eingeführt wird. Nun muß man zwei Arten von Kräften zwischen den Molekülen unterscheiden: Kohäsionskräfte und Expansionskräfte. Was die ersteren anbelangt, so kann nach unseren heutigen Erfahrungen wohl kein Zweifel bestehen, daß sie elektrostatischer Natur sind. Sie sind darauf zurückzuführen, daß jedes Molekül ein System von elektrischen Ladungen darstellt, und so in der Lage ist, auf die ebenso gebauten Nachbarmoleküle Kräfte auszuüben. Je nach der Symmetrie der Ladungsanordnung bezeichnet man das Molekül als Dipol, Quadrupol usw. Ob ein Molekül als Dipol oder als Quadrupol bezeichnet werden muß, läßt sich z. B. durch Feststellung der Temperaturabhängigkeit der DEK. entscheiden. Schwieriger ist die physikalische Deutung der Expansionskräfte. Es ist bis jetzt noch nicht gelungen, eine befriedigende Deutung dieser Kräfte zu geben.<sup>1)</sup> Es ist jedoch bekannt, daß die Expansionskräfte sehr viel schneller mit der Entfernung abnehmen als die Kohäsionskräfte. Daraus hat sich folgende Annahme entwickelt. Man

1) P. Debye, *Phys. Ztschr.* **22**, S. 302. 1921.

kann sich vorstellen, daß bei Annäherung zweier Moleküle Expansionskräfte erst auftreten, wenn sich die Moleküle auf ganz geringe Entfernung genähert haben. Wird diese Entfernung nun noch weiter verkleinert, so wächst die abstoßende Kraft ungeheuer rasch an, so daß sich ungefähr dasselbe Bild wie bei einem elastischen Stoß ergibt. Wir wollen diese Anschauung, wie es beispielsweise Jäger<sup>1)</sup> getan hat, auf Flüssigkeiten übertragen, und die Flüssigkeitsmoleküle also als starre Kugeln betrachten, die einander dann abstoßen, wenn sie zum Stoß gelangen. Diese Anschauung ist natürlich nur in erster Näherung richtig. Dies erkennt man an den Werten, die man für die spezifische Wärme von Flüssigkeiten erhält. Diese Werte lassen sich theoretisch folgendermaßen deuten: Rechnet man die spezifische Wärme  $c_v$  für ein Gas oder für eine Flüssigkeit aus, so läßt sich zeigen, daß diese Größe in folgender Weise mit dem mittleren Phasenvolumen, dem „Zustandsintegral“ zusammenhängt:

$$c_v = R \frac{\partial}{\partial T} \left[ T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \Omega \right].$$

Das Zustandsintegral  $\Omega$  läßt sich als Produkt aus den Beiträgen der einzelnen unabhängigen Zustandsgrößen anschreiben. Die spezifische Wärme enthält also diese Beiträge additiv. Man kann daher die spezifische Wärme zerlegen in einen Beitrag, der von der kinetischen, und in einen Beitrag, der von der potentiellen Energie herrührt. Könnten wir nun bei Flüssigkeiten die Moleküle wirklich als starr annehmen, so müßte der letztere Beitrag gleich 0 sein, d. h. eine Flüssigkeit müßte dieselbe spezifische Wärme haben wie ihr Dampf. Dies ist jedoch nicht der Fall.<sup>2)</sup> Die spezifische Wärme für die Flüssigkeit ist meist beträchtlich höher. Dies beweist, daß die Moleküle mit zunehmender Temperatur immer weiter ineinander eindringen. Wir wollen jedoch der Einfachheit wegen an dem Bild der starren Kugeln festhalten.

Für die Kohäsionskräfte wollen wir in den folgenden Abschnitten an der bisher von allen Autoren gemachten Annahme festhalten, daß sie eine reine Funktion des Abstandes  $r$  der

1) G. Jäger, *Ann. d. Phys.* 11. S. 1077. 1903.

2) A. Eucken, *Lehrbuch d. physik. Chemie* 1924. S. 118.

Molekülzentren seien. Um zu einem solchen Kraftgesetz zu gelangen, wollen wir voraussetzen, daß die Gruppierung der Moleküle eine regellose ist, d. h. daß keine Schwarmbildung auftritt. Wäre die Regellosigkeit vollkommen, so müßte allerdings bei Dipolmolekülen, wie eine einfache Überlegung zeigt, die durchschnittliche Kraftwirkung zwischen zwei Dipolen, d. h. die Kohäsionskraft, Null sein. Nun erleidet aber jedes Molekül im Feld der Nachbarmoleküle eine gewisse Polarisation, die der Feldstärke  $F$  am Ort des Moleküls proportional ist. Das dadurch entstandene zusätzliche Moment  $m$  ist:  $m = \gamma \cdot F$ . Der Faktor  $\gamma$  setzt sich nach Debye aus zwei Teilen zusammen. Erstens wird in den Molekülen zu dem vorhandenen festen Dipol vom Moment  $\mu$  noch ein zu  $F$  proportionales Moment  $\alpha F$  influenziert. Zweitens bewirkt das Vorhandensein eines inneren elektrischen Feldes  $F$ , daß die Orientierung der Moleküle eine unendlich kleine Abweichung von der vollständigen Regellosigkeit erfährt, indem die Einstellung in Richtung des Feldes ein wenig bevorzugt wird. Der Faktor  $\gamma$  der gesamten Polarisation berechnet sich nach Clausius-Mosotti aus der DEK. folgendermaßen:

$$(1) \quad \gamma = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{N \cdot \varrho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}.$$

Hier bedeuten  $M$  das Molekulargewicht,  $\varrho$  die Dichte der Substanz,  $N$  die Loschmidtsche Zahl,  $\epsilon$  die DEK. Nach Debye zerfällt nun  $\gamma$  in die folgenden zwei Summanden:

$$(2) \quad \gamma = \alpha + \frac{\mu^2}{3kT},$$

wobei

1.  $\alpha$  der Faktor der influenzierten Polarisation ist und
2.  $\frac{\mu^2}{3kT}$  der Faktor der Polarisation durch teilweise Einstellung der konstanten Dipole  $\mu$ . Diese Formeln gelten natürlich nur bei verhältnismäßig hohen Temperaturen.

Die Assoziation der Moleküle ist in diesen Formeln nicht berücksichtigt, obwohl fast alle Flüssigkeiten mehr oder weniger stark assoziiert sind. Man könnte versuchen, die Assoziation in der Weise zu berücksichtigen, daß man annimmt, daß sich öfters zwei Dipole zu einem Quadrupol zusammenlegen. Es ist kürzlich von Stewart, Skinner und Morrow in einer

Reihe von Arbeiten gezeigt worden<sup>1)</sup>, daß die Assoziation tatsächlich in der Weise erfolgen kann, daß sich eine Anzahl von Molekülen sowohl in der Längs- als auch in der Querrichtung zusammenlegen. Um einfache Grundlagen für die Rechnung zu haben, sehen wir vorläufig davon ab, die Assoziation zu berücksichtigen.

**§ 3. Allgemeines Verfahren zur Berechnung des Dichteverlaufs in der Kapillarschicht nach der 1. Annahme**

Über die Dicke der Kapillarschicht und den Dichteverlauf in ihr sind zur Zeit noch keine näheren Angaben bekannt. Zwar liefert die v. d. Waalssche Theorie unter Benutzung der Zustandsgleichung den Dichteverlauf in qualitativer Weise. Jedoch gestattet sie keine Aussage über die Dicke der Übergangsschicht. Andererseits sind schon verschiedentlich auf voneinander unabhängigen Wegen Schätzungen über die Dicke der Kapillarschicht versucht worden. So hat z. B. Bakker aus der Größe der Oberflächenspannung für Kohlensäure die Dicke der Kapillarschicht abgeschätzt. Er findet, daß der Übergang auf einer Strecke von nur wenigen Moleküldurchmessern vor sich geht. Erst ganz in der Nähe der kritischen Temperatur findet ein schnelles Anwachsen der Dicke statt. Ferner hat Williams versucht<sup>2)</sup>, von der Verdampfungswärme auf die Schichtdicke zu schließen. Seine Ergebnisse scheinen sich inhaltlich mit denen von Bakker zu decken.

Im folgenden soll nun ein Näherungsverfahren eingeschlagen werden, das eine beliebige Annäherung an die strenge Lösung gestattet. Der Gang der strengen Lösung ist folgender: Wir nehmen die Kapillarschicht in horizontaler Lage an und führen ein Koordinatensystem derart ein, daß die  $z$ -Achse senkrecht zur Kapillarschicht verläuft. Der Einfluß der Schwerkraft soll vernachlässigt werden. Der gesuchte Dichteverlauf wird dann durch eine Funktion von der Form  $n = f(z)$  dargestellt, wenn  $n$  die durchschnittliche Zahl der

1) G. W. Stewart u. R. M. Morrow, *Phys. Rev.* **30**. S. 232. 1927; G. W. Stewart u. E. W. Skinner, ebenda **31**. S. 1. 1928; R. M. Morrow, ebenda **31**. S. 10. 1928; G. W. Stewart, ebenda **31**. S. 174. 1928; **32**. S. 153. 1928.

2) Vgl. Handbuch Geiger-Scheel Bd. 7. S. 401.

Moleküle pro Kubikzentimeter bedeutet. Wenn  $f(z)$  bekannt ist, so ist damit auch die potentielle Energie eines Moleküls in der Kapillarschicht bestimmt. Wir gehen, wie schon in § 2 hervorgehoben wurde, zunächst von der Voraussetzung aus, daß die Kohäsionskraft eine reine Funktion der Entfernung  $r$  der Molekülzentren ist. Dann ist auch die potentielle Energie eines Molekülpaars eine reine Funktion von  $r$ , sie heiße  $V(r)$ . Die ganze potentielle Energie eines Moleküls in der Grenzschicht berechnet sich dann als die halbe Summe von  $V$  über alle Nachbarmoleküle:  $\frac{1}{2} \sum V(r)$ . Der Wert dieser Summe hängt von der Dichte der Moleküle und ihren Ableitungen nach  $z$  ab, wir wollen sie deshalb symbolisch mit  $V(r, n, n')$  bezeichnen. Damit sich die Kapillarschicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ist notwendig, daß das Maxwell-Boltzmannsche Raumverteilungsgesetz erfüllt ist. Es ist also:

$$(3) \quad n(z) = n_a e^{-\frac{V(r, n, n') - V_0}{kT}}.$$

Hier bedeuten  $V_0$  die potentielle Energie eines Moleküls im Innern der homogenen Flüssigkeit,  $n_a$  die Zahl der Moleküle pro Kubikzentimeter in der homogenen flüssigen Phase. Im obigen Ausdruck bedeuten eigentlich sowohl  $n(z)$  als auch  $n_a$  genau genommen die Zahl der Moleküle pro Kubikzentimeter freien Raumes. Wir wollen jedoch annehmen, daß der von den Molekülen erfüllte Raum verhältnismäßig klein ist, so daß man den freien Raum einfach gleich dem Gesamtvolumen setzen kann.

Die oben angeschriebene Gleichung stellt eine Funktionalgleichung für die unbekannte Funktion  $n(z)$  dar. Um sie lösen zu können, kann man sie nach dem Vorbild von v. d. Waals in eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung überführen, und dann die Differentialquotienten von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigen. Dieser Weg gibt jedoch deshalb zu Bedenken Anlaß, weil man über das Verhältnis der einzelnen Differentialquotienten von vornherein nichts aussagen kann und deshalb auch nicht in der Lage ist, den Grad der Vernachlässigung angeben zu können. Hier soll ein anderer Weg eingeschlagen werden. Die Funktion  $n(z)$  muß, da sie auf beiden Seiten in konstante Werte übergeht,

einerseits in  $n_a$ , andererseits in  $n_{\text{gas}}$ , ungefähr in der Mitte der Kapillarschicht einen Wendepunkt haben, und wir können sie daher in der Kapillarschicht in erster Näherung durch eine lineare Funktion darstellen (vgl. Fig. 1), und zwar in folgender Weise: von  $z = -\infty$  bis  $z = 0$ :  $n_0 = n_g = 0$ ; von  $z = 0$  bis  $z = h$  ( $h$  die Dicke der Kapillarschicht):  $n = n_a \frac{z}{h}$ , von  $z = h$  bis  $z = \infty$ :  $n_0 = n_a$ . Wir rechnen mit dieser Funktion, welche als einzige Unbekannte noch die Größe  $h$  enthält, die rechte Seite von Gleichung (3) aus. Es muß sich dann statt  $n(z)$  eine

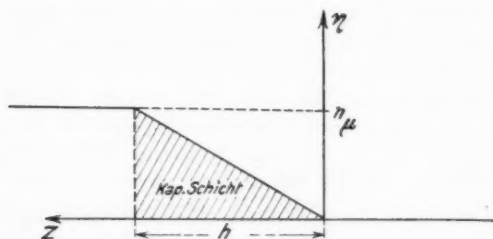


Fig. 1

Funktion  $n_1(z)$  ergeben, welche sich von der eben angenommenen dadurch unterscheidet, daß die Knicke an den Stellen  $z = 0$  und  $z = h$  abgerundet sind (vgl. Fig. 1). Läßt sich durch geeignete Wahl von  $h$  im übrigen Übereinstimmung erreichen, so würde eine zweite Näherung  $n_2(z)$ , die man dadurch gewänne, daß man die eben gefundene Funktion  $n_1(z)$  in die rechte Seite von Gleichung (3) einsetzte, und diese nun etwa durch ein numerisches Verfahren ausrechnete, sich von  $n_1(z)$  nicht mehr wesentlich unterscheiden. Wir würden also bei der Näherung  $n_1(z)$  stehenbleiben dürfen, d. h. wir könnten den so gewonnenen Wert  $h$  als die Dicke der Kapillarschicht betrachten, und die Funktion  $n_1(z)$  als die richtige Dichteverteilung. Die Rechnung geht folgendermaßen vor sich.

1. Die potentielle Energie und das Kraftgesetz werden nach den in § 2 gemachten Voraussetzungen für eine Dipolflüssigkeit berechnet.

2. Das mit  $V(r, n, n')$  bezeichnete Integral wird unter Voraussetzung der eben beschriebenen Funktion  $n(z)$  ausgerechnet und zwar getrennt für fünf verschiedene Gebiete (vgl. Fig. 2).

- 1) Im Innern der Flüssigkeit.
- 2) Im Grenzgebiet Flüssigkeit–Kapillarschicht.
- 3) Im mittleren Teil der Kapillarschicht.
- 4) Im Grenzgebiet Kapillarschicht–Gas.
- 5) Im Gasraum.

Als die Dicke der Grenzgebiete ist der doppelte Wert  $2d$  des Molekulardurchmessers zu nehmen.

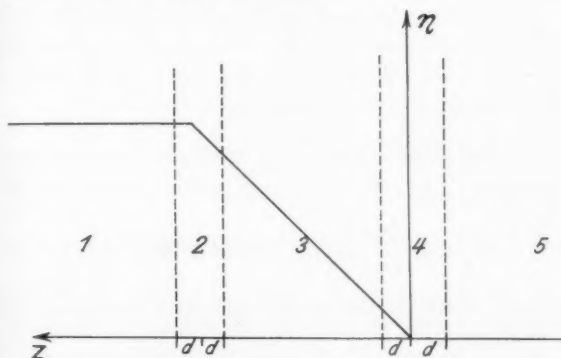


Fig. 2

3. Mit Hilfe der gewonnenen Integrale wird  $n_1(z)$  berechnet.

4. Durch Vergleich von  $n_1(z)$  mit  $n_0(z)$  ist die Dicke der Kapillarschicht zu bestimmen.

#### § 4. Kraftgesetz und potentielle Energie

Bringt man ein Teilchen in ein Feld von der Feldstärke  $\mathcal{E}$ , und wird in ihm ein Dipol  $\gamma \mathcal{E}$  influenziert, so ist die potentielle Energie dieses Dipols:  $-\frac{1}{2} \gamma \mathcal{E}^2$ . Hier soll nach Formel 2

$$\gamma = a + \frac{\mu^2}{3kT}$$

sein. Hat die Feldstärke an dem Ort eines Dipols, wenn man diesen Dipol selbst entfernt denkt, den quadratischen Mittelwert  $\overline{\mathcal{E}^2}$ , so ist die mittlere potentielle Energie  $-\frac{1}{2} \gamma \overline{\mathcal{E}^2}$  und man bekommt die gesuchte Größe

$$(4) \quad V = -\frac{1}{2} \gamma \sum' \overline{\mathcal{E}^2}.$$

$\sum'$  soll bedeuten, daß die Summe über die Beiträge aller Dipole, ausgenommen des einen, erstreckt wird.

Ehe wir diese Rechnung ausführen, wollen wir noch das Kraftgesetz der zwischen zwei Molekülen wirkenden Kohäsionskräfte ableiten. Die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  in der Umgebung eines Dipols ist (vgl. Fig. 3):

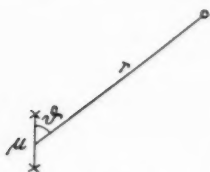


Fig. 3

$$\mathfrak{E} = \frac{\mu}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}.$$

Die potentielle Energie eines zweiten, ihm genäherten Dipols, den man sich in regelloser Temperaturbewegung denkt, während der erste noch in seiner Lage festgehalten wird, ist  $-\frac{1}{2} \gamma \mathfrak{E}^2$ , also die

potentielle Energie  $U$  des Systems der beiden Dipole

$$U = -\gamma \mathfrak{E}^2 = -\frac{\gamma \mu^2}{r^6} (3 \cos^2 \vartheta + 1).$$

Die Radialkomponente  $K_r$  der anziehenden Kraft zwischen beiden ist

$$K_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{6 \gamma \mu^2}{r^7} (3 \cos^2 \vartheta + 1).$$

Die zwischen beiden Molekülen wirkende Kohäsionskraft ergibt sich durch Bildung des Mittels über die Feldstärke, indem man auch den ersten Dipol als in thermischer Bewegung betrachtet. Man erhält:

$$\overline{K_r} = \frac{12 \gamma \mu^2}{r^7}.$$

Die anziehenden Kräfte sind also umgekehrt proportional der 7. Potenz der Entfernung.

### § 5. Durchführung der Näherungsrechnung

Der Mittelwert des Quadrats der von einem Dipol erregten Feldstärke sei mit  $\overline{\Delta \mathfrak{E}^2}$  bezeichnet:

$$\overline{\Delta \mathfrak{E}^2} = \frac{\mu^2}{r^6} (3 \cos^2 \vartheta + 1) = \frac{2 \mu^2}{r^6}.$$

Um den gesamten Mittelwert im Gebiet 1 (vgl. Fig. 2) an einer beliebigen Stelle  $z_1$  zu berechnen, führen wir statt  $z$  die Variable  $u = z - z_1$  ein. In den beiden Bereichen  $u = -\infty$  bis  $u = -d$  und  $u = +d$  bis  $u = +\infty$  ( $d$  der Moleküldurch-



messer) kann man über irgendeine Schicht  $u$  bis  $u + du$  integrieren, indem man noch beachtet, daß in ihr die Dichte  $n(u)$  konstant ist. Man erhält (Fig. 4):

$$n(u) du \int_0^{\infty} \overline{\Delta \mathfrak{E}^2} 2\pi \rho d\rho = n(u) du \int_{r=u}^{r=\infty} \frac{2\mu^2}{r^6} 2\pi r dr = \frac{\pi\mu^2}{u^4} n(u) du.$$

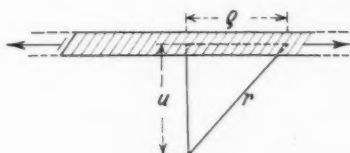


Fig. 4

Zwischen  $u = -d$  und  $u = +d$  bekommt man für eine Schicht dagegen:

$$n(u) du \int_{\sqrt{d^2-u^2}}^{\infty} \overline{\Delta \mathfrak{E}^2} \cdot 2\pi \rho d\rho = n(u) du \int_{r=d}^{r=\infty} \frac{2\mu^2}{r^6} 2\pi r dr = \frac{\pi\mu^2}{d^4} n(u) du.$$

Die Integration über den ganzen Raum liefert also:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = -\pi\mu^2 \int_{u=-\infty}^{u=-d} \frac{n(u) du}{u^4} + \frac{\pi\mu^2}{d^4} \int_{u=-d}^{u=+d} n(u) du + \pi\mu^2 \int_{u=+d}^{u=+\infty} \frac{n(u) du}{u^4}.$$

Im ersten Integral ist einzusetzen:

von  $u = -\infty$  bis  $u = -z_1$ :  $n(u) = 0$ .

$u = -z_1$  bis  $u = -(z_1 - n)$ :  $n(u) = n_n \frac{z_1 + u}{h}$ .

$u = -(z_1 - h)$  bis  $u = -d$ :  $n(u) = n_n$ .

In den beiden anderen Integralen ist  $n(u)$  konstant, gleich  $n_n$ . Die Ausführung der Integrale liefert:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{8\pi}{3} \mu^3 \frac{n_n}{d^3} \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{2z_1 - h}{z_1^3 (z_1 - h)^3} d^3 \right).$$

Wenn  $z_1$  sehr groß gegen  $d$  ist, so bekommt man den Wert  $\overline{\mathfrak{E}_0^2}$  ganz im Innern der Flüssigkeit:

$$\overline{\mathfrak{E}_0^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mu^3 n_n}{d^3}.$$

Im Gebiet 2 hat man folgendermaßen zu rechnen:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \pi \mu^2 \int_{u=-\infty}^{u=-d} \frac{n(u) du}{u^3} + \frac{\pi \mu^2}{d^3} \int_{u=-d}^{u=+d} n(u) du + \pi \mu^2 \int_{u=+d}^{u=+\infty} \frac{n(u) du}{u^3}.$$

Im ersten Integral ist:

$$\begin{aligned} \text{von } u = -\infty \text{ bis } u = -z_1 : n(u) &= 0, \\ u = -z_1 \text{ bis } u = -d : n(u) &= n_d \frac{z_1 + u}{h}. \end{aligned}$$

Im zweiten Integral ist:

$$\begin{aligned} \text{von } u = -d \text{ bis } u = (h - z_1) : n(u) &= n_d \frac{z_1 + u}{h} \\ u = (h - z_1) \text{ bis } u = d : n(u) &= n_d. \end{aligned}$$

Im dritten Integral ist:  $n = \text{konst.} = n_d$ .

Man bekommt nach einigen Umrechnungen:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mu^2 n_d}{d^3} \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( \frac{3(h - z_1)^2 + 8d(h - z_1) + 6d^2}{h \cdot d} - \frac{d^2}{h z_1^2} \right) \right].$$

Wir werden im folgenden die Lage des Punktes, in welchem der Wert von  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  berechnet ist, statt mit  $z_1$  einfach mit  $z$  bezeichnen. Ferner führen wir als Längeneinheit den Moleküldurchmesser  $d$  ein und setzen

$$\frac{z}{d} = x; \quad \frac{h}{d} = c.$$

Dann haben wir für die beiden ersten Teilschichten gefunden:

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{\mathfrak{E}^2} &= \frac{8\pi}{3} \frac{\mu^2 n_d}{d^3} \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{2x - c}{x^2(x - c)^2} \right); \quad x = \infty \text{ bis } x = c + 1 \\ 2) \quad \overline{\mathfrak{E}^2} &= \frac{8\pi}{3} \frac{\mu^2 n_d}{d^3} \left[ \frac{1}{2} \frac{x + c}{c} - \frac{1}{16c} \cdot \left( 3(c - x)^2 + 6 - \frac{1}{x^2} \right) \right]; \\ &\quad x = c + 1 \text{ bis } x = c - 1. \end{aligned}$$

Ebenso läßt sich die Rechnung für die anderen drei Teilschichten leicht durchführen. Man bekommt nun die gesuchten Werte von  $V$ , wenn man die gefundenen Werte von  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  in die Gl. (4) an Stelle von  $\sum \overline{\mathfrak{E}^2}$  einsetzt. Im Innern der homogenen Flüssigkeit ( $x = \infty$ ) bekommt man:

$$(5) \quad V_0 = -\frac{4\pi}{3} \gamma \frac{\mu^2 n_d}{d^3}.$$

Für die fünf Schichten in und neben der Oberflächenhaut ergibt sich schließlich:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad V = V_0 \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{2x-c}{x^2(x-c)^2} \right); \\ \qquad \qquad \qquad \text{von } x = \infty \text{ bis } x = c + 1, \\ 2) \quad V = V_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{x+c}{c} - \frac{1}{16c} \left( 3(c-x)^2 + 6 - \frac{1}{x^2} \right) \right]; \\ \qquad \qquad \qquad \text{von } x = c + 1 \text{ bis } x = c - 1, \\ 3) \quad V = V_0 \left( \frac{x}{c} - \frac{1}{16} \frac{2x-c}{x^2(x-c)^2} \right); \\ \qquad \qquad \qquad \text{von } x = c - 1 \text{ bis } x = 1, \\ 4) \quad V = V_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{x}{c} + \frac{1}{16c} \left( 3x^2 + 6 - \frac{1}{(c-x)^2} \right) \right]; \\ \qquad \qquad \qquad \text{von } x = 1 \text{ bis } x = -1, \\ 5) \quad V = V_0 \frac{1}{16} \frac{c-2x}{x^2(x-c)^2}; \\ \qquad \qquad \qquad \text{von } x = -1 \text{ bis } x = -\infty. \end{array} \right.$$

Trägt man  $V$  als Funktion von  $x$  auf, indem man für  $c$  einen bestimmten Wert annimmt, so findet man, daß nicht nur  $V$ , sondern auch der erste Differentialquotient  $dV/dx$  in den Übergangsstellen stetig bleibt. Die Kurve verläuft also überall glatt. In der Mitte der Kapillarschicht  $x = \frac{c}{2}$  ist  $V = \frac{1}{2} V_0$  und die Kurve verläuft zentrisch symmetrisch zu diesem Punkt. In der eigentlichen Oberflächenschicht ( $x = c - 1$  bis  $x = 1$ ), weicht die Kurve von einer Geraden:  $V = V_0 \frac{x}{c}$  nur sehr wenig ab.

Die Größen  $V_0, V$  sind natürlich überall negativ. Für große negative Werte von  $x$  wird schließlich  $V$  unendlich klein. Setzen wir also in (3)  $V = 0$  ein, so bekommen wir die Dichte des gesättigten Dampfes  $n_g$  als:

$$n_g = n_a \cdot e^{\frac{V_0}{kT}}.$$

Geben wir dem Wert  $V_0$  das positive Vorzeichen und multiplizieren wir ihn außerdem mit der Loschmidtschen Zahl  $N$  ( $= 0,606 \cdot 10^{24}$ ), indem wir setzen:

$$\beta = -N \cdot V_0,$$

nennen wir ferner das spezifische Gewicht des Dampfes  $s_g$ , das der Flüssigkeit  $s_a$ , so ist:

$$(7) \quad s_g = s_a \cdot e^{-\frac{\beta}{R \cdot T}}.$$

Hier ist  $R$  die gewöhnliche Gaskonstante.

Die Größe  $\beta$  ist nichts anderes als die Energie pro Mol, welche die Flüssigkeit aufnehmen muß, um sich in Dampf zu verwandeln. Bezeichnen wir die latente Verdampfungswärme pro Mol bei der Temperatur  $T$  mit  $L$ , so ist

$$(8) \quad \beta = L - R T.$$

Andererseits haben wir für eine Dipolflüssigkeit für  $V_0$  den Wert (5) gefunden, also

$$(9) \quad \beta = N \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \gamma \cdot \frac{\mu^2 n_a}{d^3}.$$

Diese Formel können wir an einigen Dipolflüssigkeiten prüfen, deren Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  bei verschiedenen Temperaturen bekannt sind. Die Werte von  $\gamma$  und  $\mu$  finden wir nach den Formeln (1) und (2) aus den Dielektrizitätskonstanten und ihren Temperaturkoeffizienten, ferner ist  $n_a$  zu berechnen aus der Loschmidtschen Zahl  $N = 0,606 \cdot 10^{24}$  und dem Volumen  $\Omega$  von 1 Mol der Substanz im flüssigen Zustand:  $n_a = N/\Omega$ . Die Molekulardurchmesser  $d$ , die aus gaskinetischen Daten berechnet sind, entnehmen wir den Tabellen im Landolt-Börnstein. So können wir  $\beta$  nach (9) berechnen und durch Multiplikation mit einem Maßfaktor in Kalorien angeben. Andererseits ist die Verdampfungswärme pro Mol  $L$  bei verschiedenen Temperaturen direkt gemessen und aus Tabellen zu entnehmen. Vergleicht man nun den aus (8) sich ergebenden Wert von  $\beta$  mit dem nach Formel (9) errechneten, so zeigt sich, daß der errechnete Wert immer viel zu klein ist. Er beträgt durchweg nur 0,10 bis 0,25 des direkt gemessenen Wertes. Das spricht aber keineswegs gegen die Richtigkeit unserer Annahme, daß die Kohäsionskräfte in den Dipolflüssigkeiten wesentlich durch die elektrostatischen Wirkungen der Dipolmoleküle zu erklären seien. Denn es sind bei der Herleitung der Formel (9) schwerwiegende Vernachlässigungen gemacht worden. Es ist angenommen worden, daß die Moleküle auch in der flüssigen Phase sich vollkommen ungeordnet bewegen,

wie in der gasförmigen Phase, daß also keine „Assoziationen“ eintreten. Diese Annahme ist sicher unzutreffend (vgl. S. 903). Ferner ist angenommen worden, daß die Abstoßungskräfte zwischen sehr nahe aneinander befindlichen Molekülen so ungeheuer schnell mit der Verkleinerung des Abstandes zunehmen, daß man die Moleküle als „elastische Kugeln“ ansehen darf. Auch diese Annahme ist falsch (vgl. S. 902). Beide Annahmen wirken in dem Sinne, daß  $\beta$  zu klein herauskommt. Hinzu tritt noch die Unsicherheit des Wertes  $d$ , welche einen großen Einfluß auf das Resultat hat, weil  $d$  in Formel (9) in der dritten Potenz eintritt. Wir können daraus, daß mit Formel (9) immerhin die Größenordnung von  $\beta$  getroffen wird, wohl schließen, daß unsere Annahme über die Ursache der Kohäsionskräfte richtig ist.

Die Gleichung (7) beschreibt die Dampfspannungskurve der Flüssigkeit. Denn nach den Gasgesetzen berechnet sich der Dampfdruck  $\pi$  des gesättigten Dampfes bei der Temperatur  $T$  als

$$\pi = \frac{s_g}{M} \cdot R \cdot T,$$

wo  $M$  das Molekulargewicht der Substanz bedeutet. Also ist nach (7) die Abhängigkeit des Dampfdruckes  $\pi$  von der Temperatur  $T$  gegeben durch die Formel

$$\pi = \frac{s_g}{M} \cdot R \cdot T e^{-\frac{L - RT}{RT}}.$$

Auch diese Formel kann wegen der Vernachlässigung der Eigenvolumina der Moleküle nur als eine grobe Näherung gelten.

§ 6. **Beweis, daß sich nach unseren bisherigen Annahmen kein Gleichgewichtszustand in der Kapillarschicht ergeben kann**

Unsere Rechnungen führen aber, wie wir nun zeigen wollen, zu keinem Gleichgewicht in der Kapillarschicht. Wie wir schon erwähnt haben, ergeben sie, daß die potentielle Energie  $V$  in der Schicht ungefähr proportional mit  $x$ , d. h. ungefähr proportional der durchschnittlichen Flüssigkeitsdichte  $n$  an der betreffenden Stelle ist. Es liegt dies daran, daß die Kraft  $K$  zwischen zwei Molekülen wie  $r^{-7}$ , also derartig rasch mit der Entfernung abnimmt, daß nur die allernächsten Mole-

küle einen Beitrag zu  $V$  liefern. Speziell in der Mitte der Kapillarschicht  $x = \frac{c}{2}$ , wo  $n = \frac{n_a}{2}$  ist, ist genau  $V = \frac{1}{2} V_0$ . Rechnet man nun die Dichte  $n$  nach der Formel (3) zurück, so ergibt sich in  $x = \frac{c}{2}$  der Wert

$$n = n_a e^{\frac{1}{2} \frac{V_0}{RT}} = \sqrt{n_a \cdot n_g},$$

da ja  $n_g = n_a e^{\frac{V_0}{RT}}$ . Nehmen wir, wie es der Wirklichkeit entspricht, für  $n_g$  an, daß es nicht größer ist, als etwa der tausendste Teil von  $n_a$ , so ergibt sich, daß  $n$  in dem Querschnitt  $x = \frac{c}{2}$  nur einige Hundertstel von  $n_a$  beträgt, jedoch keinesfalls  $\frac{1}{2} n_a$  sein kann. Es ist ganz unmöglich, daß wir auf diese Weise zu einer Näherung für die Dichte in der Kapillarschicht kommen.

Man könnte die Ursache des Mißerfolgs zunächst darin suchen, daß die Raumerfüllung der Moleküle nicht berücksichtigt wurde, doch kann dies nicht der Grund sein. Diese Korrektur macht sich erst in der Nähe der homogenen dampfförmigen Phase bemerkbar, und zwar in der Weise, daß die Dichte dort durchweg etwas größer sein würde, als sich nach unseren Formeln ergibt, und man sieht leicht, daß diese Korrektur viel zu klein ist, als daß sie zur Erklärung herbeigezogen werden könnte.

Die Ursache liegt in unseren in § 2 gemachten Annahmen. Man könnte zunächst vermuten, daß unser Kraftgesetz nicht der Wirklichkeit entspricht. Dann müßte man versuchen, mit irgendeinem Kraftgesetz von der Form

$$K = \frac{b}{r^m + 1},$$

wo  $m$  eine beliebige Zahl  $> 3$  ist, die gewünschte Näherung zu erhalten. Es läßt sich jedoch verhältnismäßig einfach zeigen, daß man auch so nicht zum Ziel gelangt. Wir setzen die potentielle Energie eines Molekülpaars in der Form  $V = -\frac{a}{r^m}$  an. Den tatsächlichen Verlauf der Dichte in der Kapillarschicht ersetzen wir, wie schon früher, durch einen

linearen Übergang zwischen flüssiger und dampfförmiger Phase. Die potentielle Energie eines Moleküls in der Grenzschicht ist dann in derselben Weise zu berechnen wie früher. Führt man diese Rechnung aus, so ergibt sich im Querschnitt  $x = \frac{1}{2}c$ , also für  $n = \frac{1}{2}n_a$ , folgender Wert für  $V$ : (angenommen  $c > 2$ ).

Bei geradzahligem  $m$ :

$$V = - \frac{2\pi}{m-3} \frac{n_a \cdot a}{d^{m-3}} = \frac{1}{2} V_0.$$

Bei ungeradzahligem  $m$ :

$$V = - \frac{2\pi \cdot n_a \cdot a}{(m-3) \cdot d^{m-3}} \left[ \frac{m-3}{m-2} \left( 1 + \frac{2}{(m-4)c} + \frac{2^{m-3}}{(m-3)c^{m-3}} \right) \right].$$

Im Innern der homogenen Flüssigkeit:

$$V_0 = - \frac{4\pi}{m-3} \frac{n_a \cdot a}{d^{m-3}}.$$

$V$  ist also in diesem Querschnitt in jedem Falle gleich oder wenigstens nicht sehr verschieden von  $\frac{1}{2} V_0$ .  $m$  muß mindestens gleich 4 angenommen werden, da sonst die potentielle Energie eines Moleküls im Innern der Flüssigkeit von der Größe des Gefäßes abhängig wird.

Unser Ergebnis zeigt also, daß sich kein Gleichgewichtszustand in der Kapillarschicht ausbilden kann, wenn die potentielle Energie eines Molekülpaares auch in der Kapillarschicht nur eine Funktion ihrer Entfernung von der Form

$$V = \frac{a}{r^m} \text{ ist.}$$

Die Form unseres Kraftgesetzes kann also, jedenfalls für die Kapillarschicht nicht richtig sein. Damit fällt aber auch unsere Annahme über den Bewegungszustand der Moleküle, den wir als vollkommen ungeordnet vorausgesetzt hatten. Es ist jedoch keineswegs notwendig, unsere ursprünglichen Annahmen vollständig aufzugeben. Wir müssen sie nur in der Kapillarschicht in geeigneter Weise ergänzen. Wir tun dies in folgender Weise. Wir betrachten den Bewegungszustand in der Kapillarschicht nicht mehr als völlig ungeordnet, sondern nehmen an, daß eine gewisse Orientierung der Moleküle eintritt, sobald sie in die Grenzschicht gelangen. Dies bedeutet, daß die Differenz zwischen der potentiellen Energie

eines Moleküls im Innern der homogenen Flüssigkeit und im Innern des Gases dieselbe wie früher ist. Denn im Innern der homogenen Flüssigkeit wollen wir die Bewegung der Moleküle nach wie vor als regellos annehmen, und für die Moleküle im Gasraum ist dies eine selbstverständliche Annahme. Nur der Verlauf der potentiellen Energie in der Kapillarschicht wird ein anderer.

#### § 7. Zweite Annahme:

##### Orientierung der Moleküle in der Kapillarschicht

Auf die Orientierung von Molekülen an der Oberfläche einer Flüssigkeit wurde schon von verschiedenen Autoren hingewiesen. Wohl als erster hat Langmuir<sup>1)</sup> darauf aufmerksam gemacht. Er untersuchte die Oberflächenspannung dünner, auf Wasser ausgebreiteter Schichten von organischen Substanzen, deren Moleküle aus langen Kohlenstoffketten bestanden. Es gelang ihm, von diesen molekulare Schichten herzustellen und nachzuweisen, daß die Moleküle einer solchen Schicht mit ihrer Kohlenwasserstoffkette sich meistens senkrecht zur Wasseroberfläche einstellten. Seine Messungen wurden von Adam<sup>2)</sup> mit großem Erfolg weitergeführt. Adam konnte alle von Langmuir aufgestellten Gesetzmäßigkeiten bestätigen.

Die in den eben genannten Arbeiten untersuchten Schichten bestanden aus einer dünnen Haut fremder Moleküle auf der Oberfläche der homogenen Flüssigkeit. Man darf wohl annehmen, daß die Dinge bei der eigenen Oberflächenschicht der Flüssigkeit selbst ähnlich liegen.

Wendet man die von Stewart, Morrow und Skinner<sup>3)</sup> gewonnenen Ergebnisse an, so gelangt man zu folgender Vorstellung: Die Moleküle einer Flüssigkeit bewegen sich nicht völlig ungeordnet, sondern sie bilden durch „Assoziation“ kleine Pakete, die aber allerdings im Innern der Flüssigkeit ganz regellos orientiert sind. In der Kapillarschicht, also in einem Gebiet plötzlicher Dichteänderung, werden sie jedoch

1) J. Langmuir, Journ. of the Amer. Chem. Soc. **39**. S. 1848. 1917.

2) N. K. Adam, Proc. Roy. Soc. **101**. S. 452, 516. 1922; **103**. S. 676. 687. 1923; **106**. S. 694. 1924.

3) a. a. O.



eine bevorzugte Richtung einnehmen, ähnlich wie bei den Langmuirschen Versuchen.

Man könnte allerdings gegen diesen Vergleich den Einwand erheben, daß es sich bei den von Langmuir und Adam untersuchten Fällen um Moleküle handelt, die an eine bestimmte Ebene gebunden sind, während die Moleküle der Flüssigkeit selber, auch die der Oberflächenschicht, räumliche Bewegungen ausführen. Nun besteht aber die Oberflächenschicht aus denjenigen Molekülen, die aus dem Innern der Flüssigkeit kommen, mit der Tendenz, in den Dampfraum einzudringen. Da nur ein sehr kleiner Teil die zur Überwindung der Kohäsion nötige kinetische Energie hat, so kommt die überwiegende Zahl in der Kapillarschicht durch die Wirkung der Kohäsionskräfte zur Ruhe und bewegt sich dann wieder ins Innere der Flüssigkeit zurück. Die Kapillarschicht besteht also aus momentan in ihr ruhenden Molekülen und gleicht bis zu einem gewissen Grade den von Langmuir untersuchten Schichten von Fremdmolekülen, so daß wir die an diesen gewonnenen Ergebnisse auch auf die Kapillarschicht übertragen können.

Es liegt auch ein Versuch vor, die Orientierung der Moleküle in der Grenzschicht theoretisch zu begründen. Jung<sup>1)</sup> hat in einer, der Langevinschen Theorie der spontanen Magnetisierung nachgebildeten Theorie versucht, das mittlere Moment der Moleküle in Richtung der Normalen zur Oberfläche zu berechnen. Die Annahmen, die der Rechnung zugrunde gelegt werden, sind jedoch noch sehr willkürlich, so daß das Auftreten einer für die Grenzschicht eigentümlichen Polarisierung wohl noch nicht zwingend bewiesen ist. Auch sagt die Arbeit nichts darüber aus, wie weit sich die Orientierung ins Innere erstreckt.

#### § 8. Das Gesetz der potentiellen Energie in der Oberflächenschicht

Es ist noch nicht gelungen, nach den Methoden der statistischen Mechanik zu berechnen, wie weit sich die Moleküle in der Oberflächenschicht parallel anordnen und wie stark

---

1) G. Jung, *Ztschr. f. physikal. Chem.* **123**, S. 281. 1926.

der Wert der potentiellen Energie dadurch beeinflußt wird. Immerhin kann man aber schon allein aus der Existenz einer durch eine Oberflächenhaut begrenzten Flüssigkeit gewisse Schlüsse ziehen, wie groß die potentielle Energie in den verschiedenen Schichten der Oberflächenhaut sein muß.

Die Formeln (6) lehren uns, daß die potentielle Energie in einem Punkt der Flüssigkeit, wenn man sie nach dem Kraftgesetz  $K = \frac{C}{r^2}$  berechnet, auch bei der raschen Änderung der Dichte in der Kapillarschicht, ziemlich genau proportional mit der Dichte der Flüssigkeit, also der Zahl  $n/n_a$  geht. Man kann den Wert von  $V$  in dem mittleren Bereich 3 nach Formel (6,3) berechnen als:

$$V = V_0 \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{x}{c} - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{2c}{16x^2(x-c)^2} \right) \right]$$

in der Umgebung  $x = \frac{c}{2}$ , von  $x = 1$  bis  $x = c - 1$ . Wenn  $c$ , die Zahl der auf die Kapillarschicht kommenden Moleküllschichten, nicht sehr klein ist, so ist das Korrektionsglied in dem Faktor von  $\left( \frac{x}{c} - \frac{1}{2} \right)$  ziemlich klein. Es beträgt in der Mitte des Bereiches (für  $x = \frac{c}{2}$ ), wo es am kleinsten ist:

$$\left( \frac{2c}{16x^2(x-c)^2} \right)_{x=\frac{c}{2}} = \frac{2}{c^3}.$$

Gegen die beiden Endwerte  $x = 1$  und  $x = (c - 1)$  wird es größer. Für die Endwerte selbst beträgt es:

$$\left( \frac{2c}{16x^2(x-c)^2} \right)_{x=\frac{1}{(c-1)}} = \frac{2c}{16(c-1)^2}.$$

Also selbst für den kleinen Wert  $c = 3$  liegt es zwischen 0,074 und 0,094. Für größere  $c$  wird es bedeutend kleiner. Wir können daher in dem wichtigsten, mittleren Teil der Schicht einigermaßen angenähert rechnen:

$$V = V_0 \frac{x}{c}.$$

Andererseits haben wir aber in dem Bereich der Kapillarschicht von  $x = 0$  bis  $x = c$  gerechnet:

$$\frac{n}{n_a} = \frac{x}{c}.$$

Es ist demnach in grober Näherung:

$$V = V_0 \frac{n}{n_a}.$$

Den Grund für diese einfache Gesetzmäßigkeit haben wir schon in § 6 genannt: die schnelle Abnahme der von einem Molekül ausgehenden Kraftwirkung mit der Entfernung  $r$ . Die Gesetzmäßigkeit bleibt voraussichtlich auch für andere Kraftgesetze  $K = \frac{b}{r^{m+1}}$ , wo  $m > 4$ , bestehen. Soll nun ein Kräftegleichgewicht in der Kapillarschicht möglich sein, so muß zu der potentiellen Energie  $V$  noch ein zweiter Teil  $V'$  hinzukommen, der auf die besondere Orientierung der Moleküle in der Schicht zurückzuführen ist, und welcher zu vernünftigen Werten von  $n$  führt:

$$(10) \quad \frac{n}{n_a} = e^{-\frac{V + V' - V_0}{R \cdot T}}.$$

Wir wollen hier  $V$ ,  $V'$  und  $V_0$  pro Mol rechnen, so daß  $R$  die gewöhnliche Gaskonstante bedeutet. Wie wir gesehen haben, läßt sich  $V_0$  aus der latenten Verdampfungswärme  $L$  berechnen. Ist  $L$  ebenfalls pro Mol gerechnet, so ist

$$V_0 = -(L - R T),$$

wo  $T$  die absolute Temperatur der Flüssigkeit bedeutet.  $V$ ,  $V'$  und  $V_0$  sind natürlich alles negative Größen. Setzen wir nun  $\frac{V}{V_0} = \frac{n}{n_a}$ , so ergibt sich, daß  $V'$  an einer Stelle, wo  $n$  im Verhältnis  $n/n_a$  kleiner ist als die Dichte in der Flüssigkeit selbst, die folgende Größe annehmen muß:

$$(11) \quad \begin{cases} V' = V_0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} + \frac{R T}{|V_0|} \ln \frac{n}{n_a} \right) \\ \quad = V_0 \left( 1 - \frac{n}{n_a} + \frac{R T}{|V_0|} \ln \frac{n}{n_a} \right). \end{cases}$$

Es ist klar, daß diese Formel nur dann gelten kann wenn  $n/n_a$  nicht gar zu klein ist, weil sonst  $\ln \left( \frac{n}{n_a} \right)$  zu sehr gegen  $-\infty$  geht. In der Tat gilt die Annahme  $\frac{V}{V_0} = \frac{n}{n_a}$  nicht mehr an der äußersten Grenze der Flüssigkeit, wo der

Übergang in die dampfförmige Phase beginnt, wie man ohne weiteres aus Formel (6) sieht. Die Formel gilt also von

$$\frac{n}{n_0} = \delta \quad \text{bis} \quad \frac{n}{n_0} = 1, \quad \delta > e^{\frac{V_0}{RT}}.$$

Man sieht, daß  $V'$  ein nicht sehr kleiner Bruchteil von  $V_0$  ist. Der Maximalwert  $V'_{\max}$  läßt sich leicht berechnen:

$$\frac{dV'}{dn} = -\frac{V_0}{n_0} \left( 1 - \frac{RT}{|V_0|} \frac{n}{n_0} \right) = 0.$$

Das Maximum wird erreicht für  $\frac{n}{n_0} = \frac{RT}{|V_0|}$  und beträgt:

$$(12) \quad V'_{\max} = V_0 \left[ 1 - \frac{RT}{|V_0|} \left( 1 + \ln \frac{|V_0|}{RT} \right) \right].$$

Für Wasser bei 100° berechnet sich beispielsweise:

$$-V_0 = 18 \cdot 538 - 2 \cdot 373 \text{ cal} = 8950 \text{ cal.}$$

$$RT = 2 \cdot 373 \text{ cal} = 746 \text{ cal.}$$

$$\frac{RT}{|V_0|} = \frac{1}{12}.$$

$$V'_{\max} = 0,71 \cdot V_0.$$

Man kann allgemein annehmen, daß  $V'_{\max}$  nicht sehr weit von  $V_0/2$  entfernt ist. Es ist um so größer, je größer  $V_0/RT$  ist. In Fig. 5 ist eine Kurve gezeichnet, welche zeigt, wie  $V'$  als Funktion von  $x$  genau verlaufen müßte, wenn die Dichtigkeit  $n$  der Flüssigkeit in der Kapillarschicht von  $x = 0$  bis  $x = c$  linear anstiege, wie in den Formeln (6) angenommen worden ist. Zunächst ist aus (6)  $V/V_0$  berechnet unter der Annahme, daß die Kapillarschicht aus 5 Molekülschichten bestehe:  $c = 5$ . Darauf wurde  $V'$  berechnet nach den Formeln:

$$V' = V_0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) \quad \text{von } x = \infty \text{ bis } x = c,$$

$$V' = V_0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} + \frac{RT}{|V_0|} \ln \frac{x}{c} \right) \quad \text{von } x = c \text{ bis } x = e^{\frac{V_0 - V}{RT}},$$

$$V' = 0 \quad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = -\infty,$$

Der Wert  $x = e^{\frac{V_0 - V}{RT}}$  ist von Null kaum zu unterscheiden. Für  $V$  ist der Wert  $V(x = 0)$  zu nehmen. Der Kurve 5 ist der Wert  $\frac{RT}{|V_0|} = \frac{1}{12}$  des Wassers zugrunde gelegt. Wie man sieht, erreicht  $V'$  in der Gegend von  $\frac{x}{c} = 0,1$  ein Maximum,

dessen Höhe ein wenig unter  $0,7 \cdot V_0$  liegt. Die Abweichungen von den oben berechneten Werten entsprechen den Abweichungen der nach (6) berechneten Werte von  $V$  von der Näherung  $V_0 \cdot \frac{x}{c}$ . Gegen  $x = 0$  fällt die Kurve plötzlich sehr steil ab. Man sieht hieraus, daß die Annahme der linearen Abhängigkeit der Dichte  $n$  von  $x$  in der Nähe von  $x = 0$  unmöglich zutreffend sein kann. In der Nähe der Flüssigkeits-

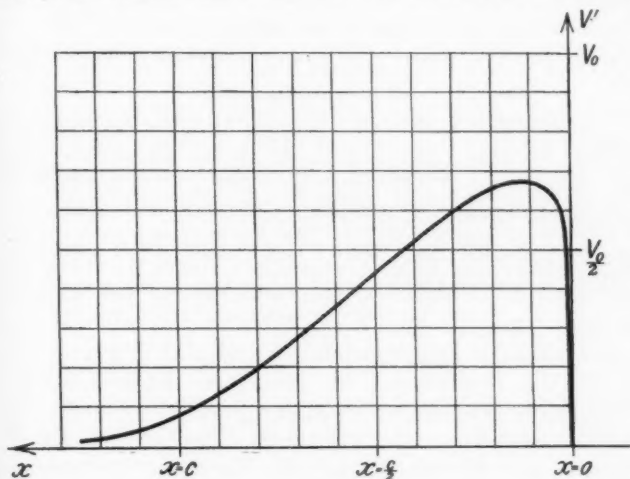


Fig. 5

oberfläche beginnt das Gas sicherlich schon in Entfernungen von mehreren Moleküldurchmessern sich zu verdichten und geht nun ganz allmählich zu größeren Werten für die Dichte über. Erst dann beginnt ein steilerer, vielleicht nahezu linearer Anstieg von  $n$  bis zum Endwert  $n_1$ . Genauere Angaben kann man bei dem jetzigen Stand der Dinge über den Verlauf von  $n$  in der Kapillarschicht nicht machen. Insbesondere ist es ganz unmöglich, irgend etwas über die Dicke  $c = \frac{h}{d}$  der Schicht zu ermitteln. Bei einer anderen Wahl von  $c$  würde die Kurve 5 sich fast gar nicht ändern, nur hätte man  $x$  in einem anderen Maßstab einzutragen. Die Durchführung der Theorie der Kapillarschicht erfordert also vor

allem erst noch, daß es möglich sei, zu berechnen, wie weit sich die Moleküle in der Schicht parallel orientieren und wie sich ihre potentielle Energie dadurch ändert. Bei einer bestimmten Temperatur muß sich ein statistisches Gleichgewicht ausbilden, in welchem das zu  $V$  hinzutretende Korrektionsglied  $V'$  der potentiellen Energie an jeder Stelle einen bestimmt berechenbaren Wert hat. Und zwar muß dann  $V'$  gerade die Gleichung (11) annähernd befriedigen. Erst nach vollständiger Durchführung dieser Rechnung könnte man die Dicke der Schicht und ihre genauere Struktur theoretisch vorhersagen.

#### Zusammenfassung

1. Es wäre unmöglich, daß sich eine Oberflächenschicht bildete, wenn die Moleküle in ihr ebenso ungeordnet orientiert wären, und sich ebenso ungeordnet bewegten, wie in der zusammenhängenden Flüssigkeit.

2. Man muß annehmen, daß die Moleküle in der Oberflächenschicht sich mehr oder weniger parallel orientieren und daß dadurch die negative potentielle Energie des einzelnen Moleküls gegenüber dem Wert, der sich bei völliger Unordnung der Teilchen berechnen würde, beträchtlich vergrößert wird.

3. Die Vergrößerung der potentiellen Energie läßt sich schätzungsweise angeben. Ist  $V_0$  die potentielle Energie eines einzelnen Moleküls in der homogenen Flüssigkeit, so liegt der Zuwachs der Energie infolge der Parallelorientierung der Moleküle in der Grenzschicht für ein Molekül im Maximum in der Gegend von etwa  $\frac{1}{2} V_0$ .

4. Es ist unmöglich, daß die Dichte in der Kapillarschicht von der Dichte der Flüssigkeit zu der des Gases linear abnimmt. Vielmehr muß auf einen verhältnismäßig raschen Abfall auf der Seite der Flüssigkeit ein sehr langsamer Abfall gegen den Dampf hin folgen.

Es ist mir zum Schluß ein Bedürfnis, Hrn. Geheimrat Mie für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein stets gleichbleibendes Interesse bei der Durchführung derselben meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Freiburg i. Br., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 17. Februar 1930)

## Über die Abhängigkeit der Linienabsorption von der Helligkeit im Lichtbogen

Von Carlfriedrich Weiß

(Mit 3 Figuren)

Unter Linienabsorption versteht man bekanntlich gemäß der Definition von Ladenburg und Reiche<sup>1)</sup> die *Gesamtabsorption*, die das Licht einer Spektrallinie erfährt, das von einem dem absorbierenden Strahler völlig gleichen Strahler ausgeht. Man bestimmt die Linienabsorption  $A_L$  durch Messung des Helligkeitszuwachses der untersuchten Spektrallinie bei *Verdopplung* der leuchtenden Dampfschicht. Denn die Helligkeit  $J'$  bei doppelter Schicht ist bestimmt zu

$$J' = J + J(1 - A_L),$$

woraus sich ergibt

$$\frac{J'}{J} = 2 - A_L.$$

Experimentell untersucht wurde der Verlauf der Linienabsorption bisher nur in gefärbten Flammen von relativ niedriger Temperatur von Gouy.<sup>2)</sup> Gouy hat den Quotienten  $k = 2 - A_L$  an einer großen Reihe von Linien als Funktion der Linienintensität gemessen und in allen Fällen den *gleichen* gesetzmäßigen Verlauf gefunden: der  $k$ -Wert fällt von dem Betrag 2 bei unendlich geringer Zentrenzahl<sup>3)</sup> mit wachsender Zentrenzahl, also zunehmender Helligkeit, ziemlich schnell ab und nähert sich rasch einem unteren Grenzwert von ungefähr  $k = \sqrt{2}$ .<sup>4)</sup> Das entspricht einer Linienabsorption von etwa 59 Proz., die auch bei den größten Helligkeiten nicht über-

1) R. Ladenburg u. F. Reiche, Ann. d. Phys. **42**. S. 181. 1913.

2) G. L. Gouy, Ann. d. Chim. et de Phys. **18**. S. 5. 1879.

3) d. h. Zahl der Dispersionselektronen  $\mathfrak{N}$ .

4) In erster Näherung.

schritten wird. Ladenburg und Reiche (a. a. O.) konnten die von Gouy gefundene Abhängigkeit der Linienabsorption von der Helligkeit theoretisch ableiten. Es zeigte sich, daß das Aussehen der Funktion  $k = f(J)$  wesentlich durch die Intensitätsverteilung in der emittierten und absorbierten Linie bestimmt ist. Die Kurve hat bei Rayleighscher Intensitätsverteilung eine ganz andere Form als bei Dispersionsverteilung. Der wesentliche Verlauf der Gouyschen Flammenkurve wird durch Zugrundelegung der Dispersionsverteilung erhalten. Allerdings ist die experimentell gefundene Kurve etwas komplizierter

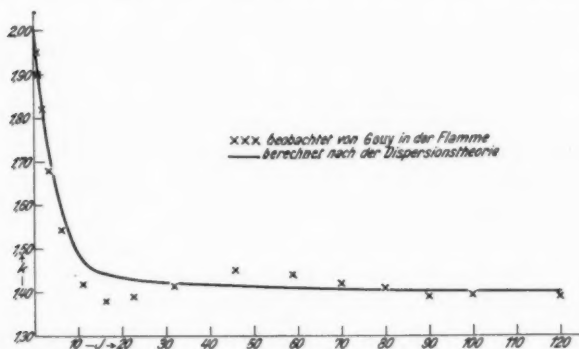


Fig. 1

als die theoretische (Fig. 1). Der  $k$ -Wert oszilliert um den Grenzwert 1,41, ehe er diesen endgültig annimmt. Senftleben<sup>1)</sup> konnte zeigen, daß dieser Verlauf reell ist. Er hat das Minimum an der richtigen Stelle wieder aufgefunden.<sup>2)</sup> Es scheint, daß für kleine Zentrenzahlen die Dopplerbreite mitbestimmend ist für den Verlauf der Funktion  $k = f(J)$ , und daß erst für größere Helligkeiten die Dispersionsfunktion weitaus überwiegt.<sup>3)</sup>

1) H. Senftleben, Ann. d. Phys. 47. S. 949. 1915.

2) Die Untersuchungen von Senftleben sind an der Gouyschen Flamme ausgeführt.

3) R. Ladenburg u. F. Reiche, Ber. d. schles. Gesellschaft f. vaterl. Kultur, 24. Februar 1914.



Die Kenntnis des Verlaufs der Linienabsorption als Funktion der Helligkeit, d. h. also die Kenntnis der Funktion  $k = f(J)$  ist aber auch für andere Lichtquellen durchaus erwünscht. Einmal erlaubt sie Rückschlüsse auf die Verteilung in der Linie. Andererseits benötigt man die  $k$ -Funktion, falls man nach einer vom Verf.<sup>1)</sup> angegebenen Methode den Betrag der Selbstabsorption des in der betreffenden Lichtquelle emittierten Lichtes bestimmen will.

Die vorliegenden Untersuchungen bezwecken die Feststellung des Funktionsverlaufs  $k = f(J)$  im Lichtbogen. Als Lichtquelle diene ein bereits früher vom Verf. (a. a. O.) verwendeter, stark überlasteter Kohlebogen, der in einem ab-

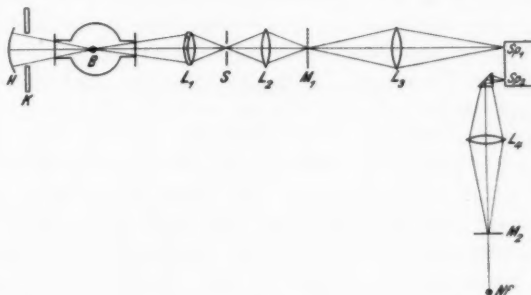


Fig. 2

geschlossenen Gefäß in Argon von Atmosphärendruck brennt, und der sich durch besondere Stabilität und Reproduzierbarkeit auszeichnet, von 1—2 mm Länge. Die Verdopplung der leuchtenden Schicht wurde durch Spiegelung erzielt. Als Meßmethode mußte mangels anderer Apparatur eine visuell-photometrische benutzt werden. Vorstehende Fig. 2 gibt eine Skizze der verwandten Anordnung.  $B$  ist der Bogen, der durch eine achromatische Linse  $L_1$  auf der Blende  $S$  in natürlicher Größe abgebildet wird. Hier werden peinlichst die glühenden Kohlenenden ausgeblendet. Die Linse  $L_2$  bildet ihrerseits die Linse  $L_1$  auf der Mattscheibe  $M_1$  ab. Das Bild von  $L_1$  auf der Mattscheibe wird durch eine Linse  $L_3$  auf den einen Spalt  $Sp_1$

1) C. Weiß, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 599. 1929 (Teil III der Arbeit).  
Annalen der Physik. 5. Folge. 4.

eines König-Martensschen Spektralphotometers abgebildet.  $H$  ist ein Hohlspiegel, der den Bogen in sich selbst abbildet. Seine Apertur ist größer als die von  $L_1$ . Zwischen  $H$  und  $B$  befindet sich eine Klappe  $K$ . Als Vergleichslichtquelle dient ein Nernstfaden  $Nf$ , der eine 20 cm entfernte Mattscheibe  $M_2$  von 5 cm Durchmesser beleuchtet.  $M_2$  wird von einer Linse  $L_4$  stark verkleinert auf den zweiten Spalt  $Sp_2$  des König-Martens abgebildet. Der ganze Strahlengang, wie auch das Photometer, waren sorgfältig gegen falsches Licht geschützt. Der Nernstfaden wurde während aller Messungen mit ein und derselben passend gewählten mittleren Belastung gebrannt und auf 1 Proz. konstant gehalten. Er wurde vor jeder Messung eine längere Zeit eingebrannt. Die verwendeten Homogenkohlen enthielten Natriumsalze beigemischt, in verschiedenen Konzentrationen. Durch Kombination verschieden stark getränkter Kohlen ließen sich beliebige Färbungen des Bogens erreichen. Sehr schwache Färbungen wurden erzielt, wenn die obere (positive) Kohle reine Homogenkohle und die untere schwach getränkt war; allerschwächste Färbungen durch Verwendung reiner Homogenkohlen, die immer Spuren von Natriumsalzen enthalten.

Bei der Auswahl einer geeigneten Linie waren die folgenden Gesichtspunkte maßgebend: Die Linie muß im Gebiet der größten Netzhautempfindlichkeit liegen; sie darf nicht zuviel kontinuierlichen Grund in ihrer Umgebung aufweisen (Korrektion vgl. weiter unten); vor allem aber muß ihre Stärke  $f = \frac{N}{N}$  (Verhältnis der Oszillatorenzahl zur Atomzahl im unteren Zustand) klein, die Linie also nicht zu leicht anzuregen sein, damit man bis zu kleinsten Helligkeiten im Bogen heruntergelangen kann. Als besonders geeignet erwies sich die grüne Linie  $2P - 4D$  der diffusen Nebenserie ( $\lambda = 5686 \text{ \AA E}$ ), deren Komponenten bei der verwendeten Spaltbreite (0,265 mm) nicht getrennt waren. Es handelt sich also eigentlich nicht um eine einzige Linie. Wie Ladenburg und Reiche indessen gezeigt haben (a. a. O.), hat das keinen Einfluß auf den Verlauf der Funktion  $k = f(J)$ , sofern nur die nicht getrennten Linien so weit auseinanderliegen, daß ihre Absorptionskurven sich nicht überdecken. Die Stärke dieser Linie ist übrigens  $f = 0,108$ .<sup>1)</sup>

1) W. K. Prokofjew, Ztschr. f. Phys. 58. S. 255. 1929.

Da die Linienintensitäten durch Kraterstreulicht und durch kontinuierlichen Grund gefälscht werden, so müssen diese Größen besonders gemessen und mit in Rechnung gestellt werden. Um das zu erreichen, mißt man die Intensität am Ort der Linie und ihre Zunahme bei Schichtverdopplung und außerdem die Intensität neben der Linie und die entsprechende Zunahme. Bezeichnet also

$J_l$  die Linienintensität,

$J_g$  die Intensität des kontinuierlichen Grundes,

$J_k$  das gestreute Kraterlicht,

$J'_k$  das gestreute Kraterlicht bei Schichtverdopplung,

$R$  das Reflexionsvermögen des Spiegels,

$A_L$  die Linienabsorption,

$k'$  das Intensitätsverhältnis für doppelte und einfache Schicht am Ort der Linie  $= \frac{\bar{J}}{J}$ ,

$\varrho$  das Intensitätsverhältnis für doppelte und einfache Schicht am Ort des Grundes  $= \frac{\bar{i}}{i}$ ,

$x$  die Intensität am Ort des Grundes in Prozenten der Intensität am Ort der Linie bei einfacher Schicht, dann ist

$$k' = \frac{\bar{J}}{J} = \frac{J_l + J_g + R(1 - A_L) \cdot J_l + R \cdot J_g + J'_k}{J_l + J_g + J_k}$$

$$\varrho = \frac{\bar{i}}{i} = \frac{J_g + R \cdot J_g + J'_k}{J_g + J_k},$$

also

$$k' = \frac{J_l + R \cdot (1 - A_L) \cdot J_l + \varrho \cdot (J_g + J_k)}{J_l + J_g + J_k},$$

ferner ist

$$\begin{aligned} i &= J_g + J_k = \frac{x}{100} \cdot J = \frac{x}{100} (J_l + J_g + J_k) \\ &= \frac{x}{100} \cdot J_l + \frac{x}{100} (J_g + J_k) \end{aligned}$$

$$(J_g + J_k) \left( 1 - \frac{x}{100} \right) = \frac{x}{100} \cdot J_l$$

$$J_g + J_k = \frac{x}{100 - x} \cdot J_l,$$

also

$$k' = \frac{1 + R \cdot (1 - A_L) + \frac{q \cdot x}{100 - x}}{1 + \frac{x}{100 - x}},$$

daraus folgt

$$k = 2 - A_L = \frac{k' \cdot \left( \frac{100}{100 - x} \right) - \frac{q \cdot x}{100 - x} - 1}{R} + 1,$$

$$J = J_i + \left( \frac{x}{100 - x} \right) \cdot J_i = J_i \cdot \frac{100}{100 - x},$$

$$J_i = J \cdot \frac{100 - x}{100}.$$

Die Messung vollzieht sich also in der Weise, daß durch Vergleich mit dem Nernstfaden erst die Intensität  $J$ , dann nach Aufziehen der Klappe  $\bar{J}$  gemessen wird; dann neben der Linie entsprechend  $i$  und  $\bar{i}$ . Alle vier Größen sind bezogen auf eine willkürliche, ein für allemal festgelegte Intensitätseinheit. Jeder Einzelwert wurde durch Mittelung über vier Einstellungen des Okularnikols gewonnen. Da Intensitätsänderungen im Bogen nur langsam vor sich gingen, so erhielt man während einer Messung eine große Anzahl von Mittelwerten innerhalb eines gewissen Helligkeitsintervalles. Nur am Anfang der Messung, nach dem Zünden, besitzt der Bogen für kurze Zeit eine hohe Intensität, die schnell auf einen relativ konstanten Wert abklingt. Schwierig waren nur die Messungen bei kleinen Linienhelligkeiten. Hier betrug der Grund gelegentlich 70 Proz. der Gesamthelligkeit am Ort der Linie. Aus den vier Größen  $J$ ,  $\bar{J}$ ,  $i$ ,  $\bar{i}$  werden dann  $k'$ ,  $q$ ,  $x$  bestimmt, aus denen man die gewünschten Parameter

$$J_i = J \cdot \frac{100 - x}{x}$$

und

$$k = \frac{k' \cdot \left( \frac{100}{100 - x} \right) - \frac{q \cdot x}{100 - x} - 1}{R} + 1$$

berechnen kann, so daß man auf diese Weise zugehörige Werte der Funktion  $k$  und ihrer Variablen  $J_i$  experimentell ermitteln kann. Dazu ist allerdings noch der Wert des Reflexionsvermögens  $R$  erforderlich. Hierbei ist zu bedenken, daß es

sich nicht allein um das Reflexionsvermögen des Spiegels handelt, sondern daß in diesem Begriff alle anderen Strahlungsverluste mit eingehen, die das Licht auf dem Wege von den Kohlen zum Spiegel und zu den Kohlen zurück an der Verschußplatte erleidet. Die Größe  $R$  muß deshalb an derselben Apparatur bestimmt werden, mit der die  $k$ -Werte gemessen worden sind. Das geschah auf folgende Weise: eine leuchtende Bunsenflamme wurde in das Innere der Lampe gebracht, genau an die Stelle des Bogens. Da eine solche Flamme das zurückgespiegelte Licht weder absorbiert noch merklich zerstreut<sup>1)</sup>, so ergibt eine Intensitätsmessung am Ort der Linie bei einfacher und doppelter Schicht

$$\frac{\bar{i}}{i} = \frac{i + R \cdot i}{i} = 1 + R,$$

also

$$R = \frac{\bar{i}}{i} - 1.$$

Die Messungen ergaben für  $R$  den Mittelwert 80 Proz.; zu dem gleichen Betrag für  $R$  gelangt man bei Benutzung der Fresnelschen Formeln zur Bestimmung der Reflexionsverluste an der Verschußplatte und mit dem Wert 94 Proz. für das eigentliche Reflexionsvermögen des Silberspiegels für  $\lambda = 5686 \text{ \AA E.}$  Führt man eine große Anzahl der beschriebenen Messungen bei den verschiedensten Bogenfärbungen durch, so erhält man sehr viele Meßpunkte, die ein größeres Helligkeitsintervall dicht ausfüllen. Man erhält so den gesuchten Funktionsverlauf, allerdings in einer willkürlichen Helligkeitseinheit. Bezeichnet man mit Gouy und mit Ladenburg und Reiche die Intensität mit 1, bei der  $k = 1,90$  ist, so erhält man eine Darstellung in der üblichen Intensitätsskala, die den Vergleich mit den bisher vorliegenden experimentell und theoretisch gefundenen Funktionen erlaubt.

Wie schon erwähnt, existiert außer den in Fig. 1 gezeichneten Funktionsverläufen eine weitere Funktion, die Ladenburg und Reiche unter der Annahme Rayleighscher Verteilung berechnet haben. Diese letztere Kurve gibt zweifellos die Linienabsorption wieder unter Verhältnissen, wie sie etwa

1) H. Jakob, Ann. d. Phys. 86. S. 449. 1928.

bei der Resonanzstrahlung bei kleinen Dampfdichten vorliegen; sie fällt stärker ab als die beiden Kurven der Fig. 1 und strebt schnell gegen den Grenzwert 1. Schon die ersten meiner Messungen ergaben aber als Grenzwert 1,40. Reine Dopplerverteilung konnte also bei mir nicht vorliegen, was auch nicht zu erwarten war.

Fig. 3 zeigt nun die von mir gemessene Funktion (in vergrößertem Helligkeitsmaßstab gegenüber Fig. 1). Sie fällt innerhalb der Fehlergrenze mit der auf Grund der Dispersions-

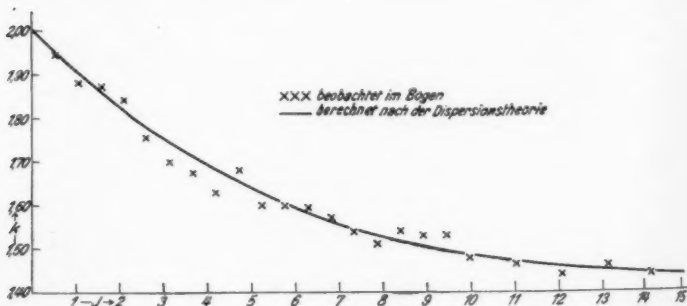


Fig. 3

funktion berechneten Kurve zusammen, ohne die charakteristischen Abweichungen der Gouyschen Flammenkurve zu zeigen. Um den Vergleich nicht nur auf die Lage des einen Punktes für  $k = 1,90$  zu stützen, wurden die Kurven der Fig. 1 und meine Meßpunkte in logarithmischer Intensitätsskala aufgetragen, und durch Parallelverschiebung das Verhältnis meiner Intensitätseinheit zu der von Gouy und von Ladenburg und Reiche ermittelt. Jeder eingezeichnete Punkt ist ein Mittelwert aus vielen Einzelresultaten.<sup>1)</sup> Innerhalb eines halben Intensitätsintervalls wurden immer alle darin liegenden  $k$ -Werte gemittelt. Außer den in der Figur verzeichneten Mittelwerten gelang es, noch folgende Werte (Tab. 1) bei höheren Intensitäten zu gewinnen, die natürlich nicht die

1) Jedes Einzelresultat ist seinerseits ein Mittelwert aus vielen Einstellungen.

gleiche Genauigkeit aufweisen wie die eingezeichneten Meßpunkte. Sie liegen genau um den theoretischen Grenzwert  $\sqrt{2}$  herum; ihr Mittelwert ist  $1,40_3$ .<sup>1)</sup>

Tabelle 1

$J$	$k$
35,2	1,33
40,2	1,42
44,4	1,40
49,2	1,37
55,3	1,45
55,8	1,37
58,4	1,41
73,8	1,47
79,5	1,39
103,4	1,42

Das gefundene Resultat ist zunächst außerordentlich überraschend, denn die von Ladenburg und Reiche zugrunde gelegte Dispersionsverteilung ist schon in der Flamme, wenigstens bei kleinen Helligkeiten, nicht streng vorhanden, wie die kleinen Abweichungen der Gouykurve zeigen. Nun ist die Funktion  $k = f(J)$  nicht sehr empfindlich gegenüber kleinen Störungen in der Verteilung, weil es sich bei ihr um Integrale über die gesamte Verteilung handelt. Im Falle des Bogens hat man es jedoch mit erheblichen Störungen der Dispersionsverteilung zu tun, die alle eine Verbreiterung der Linie bewirken. Es kommen folgende Ursachen der Verbreiterung noch in Frage:

1. Dopplereffekt.
2. Kopplungseffekt.
3. Starkeffekt.
4. Fremdgaseffekt.

---

1) Bei vielen Messungen, insbesondere bei kleinen Helligkeiten der grünen Linie, wurde auch noch der  $k$ -Wert an den  $D$ -Linien mitbestimmt. Es ergab sich immer für  $k$  der Grenzwert: Mittelwert aus allen Messungen  $k = 1,40_1$ . Übrigens ist der theoretische Grenzwert in zweiter Näherung nicht ganz konstant, sondern nimmt bei großen Helligkeiten ein wenig ab; z. B. für  $J = 120$  ist  $k = 1,400$ ; vgl. R. Ladenburg u. F. Reiche, a. a. O.

Der Fremdgaseffekt ist schon lange bekannt.<sup>1)</sup> Er ist durchaus von der Lorentzschen Stoßdämpfung (Dispersionsverteilung) zu sondern. Er tritt mit wachsendem Fremdgasdruck auf und bewirkt eine unsymmetrische Verbreiterung. Trumphy<sup>2)</sup> und Minkowski<sup>3)</sup> erklären den Effekt durch das Auftreten einer Klasse von Elementarprozessen, die von Oldenberg<sup>4)</sup> zuerst nachgewiesen sind, und die sich beim Zusammenwirken von Strahlung mit Stößen abspielen. Zu der eigentlichen Linie tritt noch ein Kontinuum von Zusatzfrequenzen vorwiegend auf einer Seite der Linie; im vorliegenden Falle, bei Argonzusatz, wird nach den Untersuchungen von Minkowski die Linie stark unsymmetrisch nach Rot verbreitert, während sich die violette Seite noch durch eine Dispersionsfunktion darstellen läßt.

In ähnlicher Weise wirkt der intramolekulare Starkeffekt. Die verbreiternde Wirkung der Felder benachbarter Ionen, Dipole, Quadrupole ist schon frühzeitig von Stark vermutet und festgestellt worden.<sup>5)</sup> In einer großen Reihe von Arbeiten verschiedener Autoren<sup>6)</sup> konnte mindestens qualitativ gezeigt werden, daß der Effekt wirksam ist in einem Grade, der der jeweiligen Beeinflussbarkeit der Linien durch den Starkeffekt selbst entspricht. Je nach der Serienangehörigkeit der Linie ist also eine symmetrische oder unsymmetrische Verbreiterung zu erwarten.

Der Kopplungseffekt<sup>7)</sup>, der durch die Einwirkung gleich-

---

1) Chr. Füchtbauer u. W. Hofmann, *Ann. d. Phys.* **43**. S. 96. 1914; Chr. Füchtbauer u. H. Barthels, *Ztschr. f. Phys.* **4**. S. 337. 1921; Chr. Füchtbauer u. C. Schell, *Phys. Ztschr.* **14**. S. 1164. 1913; Chr. Füchtbauer u. G. Joos, *Phys. Ztschr.* **21**. S. 694. 1929; **23**. S. 73. 1922; Chr. Füchtbauer, G. Joos u. O. Dinkelacker, *Ann. d. Phys.* **71**. S. 204. 1923; Chr. Füchtbauer u. H. Meier, *Phys. Zs.* **27**. S. 853. 1926.

2) B. Trumphy, *Ztschr. f. Phys.* **53**. S. 57. 1929.

3) R. Minkowski, *Ztschr. f. Phys.* **55**. S. 16. 1929.

4) O. Oldenberg, *Ztschr. f. Phys.* **47**. S. 184. 1928; **51**. S. 605. 1928.

5) J. Stark, *Jahrb. d. Radioakt.* **12**. S. 348. 1916.

6) Vgl. z. B. *Handb. d. Phys.* **21**. S. 240 (Minkowski).

7) B. Trumphy, *Ztschr. f. Phys.* **34**. S. 715. 1925; W. Schütz, *Ztschr. f. Phys.* **35**. S. 243. 1925; R. Minkowski, *Ztschr. f. Phys.* **36**. S. 839. 1926; L. Mensing, *Ztschr. f. Phys.* **34**. S. 611. 1925; J. Holtsmark, *Ztschr. f. Phys.* **34**. S. 722. 1925.



artiger Atome aufeinander zustandekommt, ist ein Resonanzeffekt. Er kann nur dann eine beobachtbare Verbreiterung verursachen, wenn man es vorwiegend mit gleichen Atomen im gleichen Quantenzustand zu tun hat. Er wird also vorzugsweise in Absorption auftreten, wenn sich fast alle Atome im Normalzustand befinden, und bei Abwesenheit fremder Gase. Nach Messungen von Minkowski tritt der Effekt im Vakuumrohr in Absorption bei Dampfdrucken von 0,01—0,02 mm in Erscheinung. Im Fall der Emission im untersuchten Lichtbogen, wo sich einmal die Natriumatome über viele Zustände verteilen, und bei einem Fremdgasdruck von 1 Atmosphäre, ist sicher damit zu rechnen, daß dieser Effekt gegenüber den vorgenannten unmerklich ist.

Der Dopplereffekt ist druckunabhängig. Sein Einfluß auf die Intensitätsverteilung ist sicher zu vernachlässigen gegenüber der großen Verbreiterung, die durch die beiden zuerst genannten Effekte zustandekommt.

Die Verhältnisse liegen also bei meinen Versuchen anders als bei den Gouyschen Messungen an den *D*-Linien in der Flamme. Verbreiterung durch intramolekularen Starkeffekt kommt dort nicht in Frage, weil einmal die Hauptserienlinien der Alkalien nur quadratischen Starkeffekt aufweisen, und weil außerdem die Ionendichte in der Flamme sehr viel geringer ist als im Bogen. Der Fremdgasereffekt ist bei den Gouyschen Versuchen von wesentlich kleinerer Größenordnung, weil, wie man überschlagen kann, die Zahl der „Dreierstöße“ zwischen angeregten Atomen, Fremdasmolekülen und Quanten kleiner ist. Deshalb ist es auch zu verstehen, weshalb der Dopplereffekt bei der Erklärung der Gouyschen Versuche, wenigstens bei kleinen Zentrenzahlen, berücksichtigt werden muß.

Man darf also vermuten, daß die Intensitätsverteilung in dem in Argon brennenden Bogen im wesentlichen besteht aus einer Dispersionsverteilung mit einem überlagerten Kontinuum von Zusatzfrequenzen. Sie ist nach dem Vorgegangenen möglicherweise stark unsymmetrisch. Es bleibt die Frage, wie es kommt, daß gleichwohl sich die gleiche Funktion  $k = f(J)$  ergibt, wie sie für den Fall einer ungestörten Dispersionsverteilung von Ladenburg und Reiche berechnet worden ist. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich unter gewissen

Annahmen die eben erwähnte Theorie unschwer auf gestörte Dispersionsverteilung erweitern läßt.

Die Ergebnisse von Ladenburg und Reiche<sup>1)</sup> sind abgeleitet worden auf der Grundlage der klassischen Drude-Voigtschen Dispersionstheorie. Unter Annahme eines isolierten, mäßig starken Absorptionsstreifens ( $n \kappa < 1$ ), d. h. wenn der Brechungsquotient im Absorptionsbereich wenig variiert, ergibt sich folgender Ausdruck für die Linienabsorption

$$A_L = \frac{\int_{\nu_0 - \delta}^{\nu_0 + \delta} (1 - e^{-2a \cdot l})^2 \cdot d\nu}{\int_{\nu_0 - \delta}^{\nu_0 + \delta} (1 - e^{-2a \cdot l}) d\nu}.$$

Dabei ist  $a = n \kappa \cdot \frac{\nu}{c}$ , wo  $n \kappa$  unter den angegebenen Einschränkungen dargestellt ist durch

$$n \kappa = \frac{\rho \cdot \nu'}{2 n_0} \cdot \frac{\nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}.$$

$\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$  ist die Frequenz,  $\rho$  ist der bekannte Parameter, der mit der Zahl der Dispersionselektronen  $\mathfrak{N}$ , mit Ladung  $e$  und Masse  $m$  des Elektrons durch die Gleichung  $\rho = 4\pi \mathfrak{N} \frac{e^2}{m}$  zusammenhängt.  $n_0$  ist der Brechungsquotient, der in der Umgebung von  $\nu_0$  herrschen würde, wenn die Elektronen dieser Gattung nicht vorhanden wären.  $\nu'$  ist die Dämpfung,  $l$  die Schichtdicke. Für  $\delta$  gelten die Bedingungen, daß

$$\delta \ll 2\nu_0$$

aber

$$2\delta \gg \nu',$$

d. h. daß das untersuchte Spektralgebiet wesentlich größer ist als die Halbwertsbreite der Funktion  $n \kappa$ . Setzt man

$$\frac{\rho \cdot \nu' \cdot l}{n_0 \cdot c} = \sigma, \quad \nu_0 - \nu = \mu$$

und, auf Grund der Voraussetzung  $\delta \ll 2\nu_0$ , im Integrationsintervall ( $|\mu| \leq \delta$ )  $\nu_0 + \nu = 2\nu_0$ , dann wird die Linienabsorption

1) R. Ladenburg und F. Reiche, a. a. O.

$$A_L = \frac{\int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{4\mu^2 + \nu'^2}}\right) d\mu}{\int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{4\mu^2 + \nu'^2}}\right) d\mu} = 2 - \frac{2e^{-\frac{r}{2}} \cdot [J_0(ir) - iJ_1(ir)]}{J_0\left(\frac{ir}{2}\right) - iJ_1\left(\frac{ir}{2}\right)}$$

und die Linienintensität<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} J_L &= S \cdot \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{4\mu^2 + \nu'^2}}\right) d\mu \\ &= S \cdot \frac{\pi r \nu'}{2} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \left[J_0\left(\frac{ir}{2}\right) - iJ_1\left(\frac{ir}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dabei ist  $S$  das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers von der Temperatur der Lichtquelle und

$$r = \frac{\sigma}{\nu'^2} = \frac{\varrho \cdot l}{n_0 \cdot c \cdot \nu'}.$$

Jeder Wert von  $r = \frac{\sigma}{\nu'^2}$  ergibt dann ein einander zugehöriges Wertepaar von  $A_L$  und  $J_L$ , so daß man auf diese Weise die Funktion  $k = 2 - A_L = f(J_L)$  rechnerisch gewinnen kann.

Wir benutzen nun den gleichen Ansatz, ersetzen aber den eingliedrigen Ausdruck für  $n_\kappa$  durch eine Summe mit vielen Gliedern, d. h. wir setzen dementsprechend

$$\begin{aligned} 2n_\kappa \cdot \frac{\nu}{c} \cdot l &= 2a \cdot l \\ &= \frac{\sigma_1}{4\mu^2 + \nu'^2} + \frac{\sigma_2}{4(\mu - \alpha)^2 + \nu'^2} + \frac{\sigma_3}{4(\mu - \beta)^2 + \nu'^2} + \dots, \end{aligned}$$

wobei wir  $\sigma_n > \sigma_{n+1}$  voraussetzen und  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  von der Größenordnung von  $\nu'$ . Das würde bedeuten, daß wir eine unsymmetrische Verteilung zusammensetzen aus einer Reihe von eng benachbarten Dispersionsverteilungen. Wir ordnen

1) Bei der Auswertung der Integrale wird gesetzt

$$\int_{-\delta}^{+\delta} = \int_{-\delta}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-\delta} = R - I - II.$$

Die Integrale I und II können in 1. Annäherung gegen das Integral R vernachlässigt werden. Die angegebenen Lösungen sind unter Vernachlässigung von I und II ausgerechnet.

also dem leuchtenden Dampf an Stelle einer Eigenfrequenz  $\nu_0$ , eine beliebige Reihe von Eigenfrequenzen  $\nu_0, \nu_0 - \alpha, \nu_0 - \beta, \dots$  zu und nehmen an, daß die Stärke der Absorption für  $\nu_0$  am größten ist. Man kann sich leicht graphisch veranschaulichen, daß man auf diese Weise eine Verteilung ähnlicher Art erhält, wie sie Minkowski (a. a. O.) in Absorption beobachtet hat. Bei dieser linearen Zusammensetzung der Funktion  $n\kappa$  ist allerdings vorausgesetzt, daß keine Wechselwirkung zwischen den  $\nu_0, \nu_0 - \alpha, \dots$  stattfindet. Man darf wohl annehmen, daß Wechselwirkung, die höhere Glieder im Ausdruck von  $n\kappa$  zur Folge hat, mit derselben Begründung zu vernachlässigen ist, wie der Kopplungseffekt. Es bleibt natürlich fraglich, ob die wirklich vorhandene Verteilung durch den eben angegebenen Ansatz für  $n\kappa$  wiedergegeben wird. Auf alle Fälle wird man aber vermuten können, daß diese zugrunde gelegte Verteilung eine der wirklich vorhandenen ähnliche ist. Da die Funktion  $k = f(J)$ , wie schon gesagt, nicht sehr empfindlich ist gegenüber kleinen Abweichungen in der Verteilung, so darf man wohl ruhig die tatsächlich vorliegende Funktion  $n\kappa$  approximieren durch die vorgeschlagene Summe.

Wir führen nun der Einfachheit halber die Rechnung nur mit einem Zusatzglied durch; sie läßt sich aber leicht auf beliebig viele Glieder erweitern. Wir setzen also

$$2al = \frac{\sigma_1}{4\mu^2 + \nu'^2} + \frac{\sigma_2}{4(\mu - \alpha)^2 + \nu'^2}.$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von  $\alpha$  erhält man

$$\begin{aligned} 2al &= \frac{\sigma_1}{4\mu^2 + \nu'^2} + \frac{\sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2} + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \frac{8\mu}{(4\mu^2 + \nu'^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{96\mu^2 - 8\nu'^2}{(4\mu^2 + \nu'^2)^3} + \frac{\alpha^3}{3!} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{1536\mu^3 - 384\mu\nu'^2}{(4\mu^2 + \nu'^2)^4} + \dots \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2} + z \end{aligned}$$

wo

$$z = \sigma_2 \cdot \alpha \cdot \frac{8\mu}{(4\mu^2 + \nu'^2)^2} + \sigma_2 \cdot \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{96\mu^2 - 8\nu'^2}{(4\mu^2 + \nu'^2)^3} + \dots$$

ist, also

$$e^{-2al} = e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \cdot e^{-z}.$$

Nun entwickelt man  $e^{-z}$  nach Potenzen von  $z$  und erhält

$$\begin{aligned} e^{-2al} &= e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} + e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \cdot \left( -z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{-2a'l} + e^{-2a'l} \cdot P, \end{aligned}$$

wo  $2a'l$  und  $P$  also bedeuten

$$2a'l = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2} \text{ und } P = -z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Daraus folgt die Linienabsorption

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2al})^2 d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2a'l}) d\mu} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2a'l})^2 d\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} [-2e^{-2a'l} \cdot P + 2e^{-4a'l} \cdot P + e^{-4a'l} \cdot P^2] d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2a'l}) d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a'l} \cdot P \cdot d\mu} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2a'l})^2 d\mu + Z_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2a'l}) d\mu + Z_2}. \end{aligned}$$

Nun ist  $\sigma$  etwa von der Größenordnung  $10^{19}$  bei „kleinen“ Helligkeiten,  $10^{24}$  bei großen Helligkeiten,  $\nu'$  etwa von der Größenordnung  $10^{10}$ . Daraus folgt, daß  $z$  nicht für alle Werte von  $\mu$  als kleine Größe zu betrachten ist. So ist z. B. das zweite Glied von  $z$  für  $\mu = 0$ :

$$\frac{\alpha^2}{2!} \sigma^2 \cdot \frac{96\mu^3 - 8\nu'^2}{(4\mu^2 + \nu'^2)^3} \longrightarrow 4 \frac{\alpha^2 \sigma^2}{\nu'^4}.$$

Da  $\alpha$  von der Größenordnung  $\nu'$  ist, so wird das zweite Glied von der Größenordnung  $\frac{\sigma_2}{\nu'^2}$  für  $\mu = 0$ , also möglicherweise bis zu  $10^3$ . Man muß deshalb die Entwicklung in  $z$  sehr weit treiben und dann wiederum in der Darstellung von  $e^{-z}$  sehr viele Potenzen von  $z$  berücksichtigen. Die Größen  $Z_1$  und  $Z_2$  bestehen also aus einer sehr großen Anzahl von Gliedern. Über die Einzelintegrale, und mögen es noch so viele sein, lassen sich aber sehr leicht bestimmte Aussagen machen. Sie sind alle entweder von der Form

$$K = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^{2n+1}}{(4\mu^2 + \nu'^2)^m} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \cdot d\mu$$

oder

$$L = c' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^{2n}}{(4\mu^2 + \nu'^2)^m} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \cdot d\mu.$$

Die Integrale  $K$  verschwinden aber alle für sämtliche Werte von  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2}$ , wie sich leicht zeigen läßt. Die Integrale von der Form  $L$  werden alle für größere Werte von  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2}$  außerordentlich klein, infolge der Eigenschaften der Besselschen Funktionen mit rein imaginärem Argument. Wir zeigen die Eigenschaften der  $L$  an zwei Beispielen, die wir beliebig herausgreifen; eines mit geradem  $m$  ( $= 4$ ), das andere mit ungeradem  $m$  ( $= 7$ ):

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \alpha^2 \sigma_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{64\mu^2}{(4\mu^2 + \nu'^2)^4} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} d\mu \\ &= \frac{8 \cdot \alpha^2 \sigma_2^2}{\nu'^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2\mu}{\nu'}\right)^2}{\left[\left(\frac{2\mu}{\nu'}\right)^2 + 1\right]^4} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\mu}{\nu'}\right)^2 + 1}} \cdot d\left(\frac{2\mu}{\nu'}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} = 2 \int_0^{+\infty} \end{aligned} \right.$$

Durch die Substitution  $\frac{2\mu}{\nu'} = \operatorname{tg} z$  geht  $A$  über in

$$\begin{aligned} A &= \frac{16\alpha^2\sigma_2^2}{\nu'^5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 z \cdot dz}{(1 + \operatorname{tg}^2 z)^3} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \cos^2 z} \\ &= \frac{16\alpha^2\sigma_2^2}{\nu'^5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z \cdot \cos^4 z \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \cos^2 z} \cdot dz \\ &= \frac{16\alpha^2\sigma_2^2}{\nu'^5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{32} \cos 6z - \frac{1}{16} \cos 4z + \frac{1}{32} \cos 2z + \frac{1}{16} \right] \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \cos^2 z} dz \\ &= \frac{16\alpha^2\sigma_2^2}{\nu'^5} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}} \cdot \int_0^{\pi} \left[ -\frac{1}{64} \cos 3x - \frac{1}{32} \cos 2x + \frac{1}{64} \cos x + \frac{1}{32} \right] \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2} \cdot \cos x} dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Integraldarstellung der Besselschen Funktionen<sup>1)</sup>

$$J_n(y) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iy \cos \varphi} \cdot \cos n\varphi d\varphi$$

wird

$$\begin{aligned} A &= \frac{16\alpha^2\sigma_2^2}{\nu'^5} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}} \cdot \pi \\ &\quad \cdot \left[ \frac{i}{64} \cdot J_3(y) + \frac{1}{32} \cdot J_2(y) + \frac{i}{64} \cdot J_1(y) + \frac{1}{32} \cdot J_0(y) \right], \end{aligned}$$

wobei  $y = i \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}$  ist, und  $J_0, J_1, J_2$  und  $J_3$  die Besselschen Funktionen 0., bzw. 1., 2. und 3. Ordnung sind. Bei rein imaginärem Argument nähern sich nun alle Funktionen  $i^{-n} \cdot J_n$  mit wachsendem Argument dem gleichen Ausdruck an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [i^{-n} \cdot J_n(ix)] = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

1) Vgl. z. B. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln S. 169.

Mit wachsendem  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}$  nähert sich also der Ausdruck in der eckigen Klammer dem Wert

$$\left( \frac{1}{64} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{32} \right) \cdot \frac{e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}}}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}}}$$

an, also das Integral  $A$  dem Wert

$$A = \frac{\pi \cdot 16\alpha^2 \cdot \sigma_2^2}{\nu'^5 \cdot \sqrt{2\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\nu'^2}}} \cdot \left[ \frac{1}{64} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{32} \right].$$

Nun enthalten die beiden, von Ladenburg und Reiche berechneten Hauptintegrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2\alpha' t})^2 d\mu \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-2\alpha' t}) d\mu$$

in ihrer Lösung den Faktor  $\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'}$ , der also noch aus allen Gliedern des Zählers und Nenners von  $A_L$  herauszukürzen ist. Damit wird das Integral

$$A = \frac{16}{\sqrt{\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2}}} \cdot \frac{\alpha^2}{\nu'^4} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \left[ \frac{1}{64} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{32} \right].$$

Da  $\sigma_1 + \sigma_2 > \sigma_2$  ist, wird der Faktor vor der eckigen Klammer höchstens von der Größenordnung  $\frac{\sigma_2}{\nu'^2}$ , also etwa  $10^4$  bei größten Helligkeiten. Das Integral  $A$  verschwindet also. Dieses Resultat gilt praktisch bereits bei mittleren Helligkeiten  $\left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} = 100 \right)$ .

Als weiteres Beispiel sei betrachtet das Glied

$$(2) \quad B = -64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\mu^4}{(4\mu^2 + \nu'^2)^7} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\mu^2 + \nu'^2}} \cdot d\mu.$$



In der gleichen Weise wie  $A$  transformiert, wird

$$\begin{aligned}
 B &= - \frac{64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2}{\nu'^9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^8 z - 2 \cos^{10} z + \cos^{12} z) \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \cos^2 z} \cdot dz \\
 &= - \frac{64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2}{2 \nu'^9} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2}} \cdot \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2^{11}} \cdot \cos 6x + \frac{1}{2^9} \cdot \cos 5x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \cdot \cos 4x - \frac{3}{2^9} \cdot \cos 3x - \frac{17}{2^{11}} \cdot \cos 2x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2^8} \cdot \cos x + \frac{7}{2^{10}} \right] \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2} \cdot \cos x} \cdot dx \\
 &= - \frac{64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2}{2 \nu'^9} \cdot e^{-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2}} \cdot \pi \cdot \left[ -\frac{1}{2^{11}} \cdot J_6(y) + \frac{i}{2^9} \cdot J_5(y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \cdot J_4(y) + \frac{3i}{2^9} \cdot J_3(y) + \frac{17}{2^{11}} \cdot J_2(y) + \frac{i}{2^8} \cdot J_1(y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7}{2^{10}} \cdot J_0(y) \right].
 \end{aligned}$$

Dabei ist wie vorher  $y = i \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2}$ . Für große Werte von  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2}$ , also große Helligkeiten, wird auch dieses Integral

$$\begin{aligned}
 B &= - \frac{64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2}{3 \nu'^9} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2}}} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{3}{2^9} - \frac{17}{2^{11}} - \frac{1}{2^8} + \frac{7}{2^{10}} \right] \\
 &= - \frac{64^2 \cdot \alpha^6 \cdot \sigma_2^2}{2 \nu'^9} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \nu'^2}}} \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{2^{11}} - \frac{4}{2^{11}} + \frac{2}{2^{11}} + \frac{12}{2^{11}} - \frac{17}{2^{11}} - \frac{8}{2^{11}} + \frac{14}{2^{11}} \right].
 \end{aligned}$$

Nach Division mit  $\pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  wird der Ausdruck vor der eckigen Klammer höchstens von der Größenordnung  $10 \frac{\sigma_2}{\nu'^2}$ . Das Integral  $B$  verschwindet also auch.

Bei großen Helligkeiten verschwinden also alle Integrale in  $Z_1$  und  $Z_2$ , und der Ausdruck der Linienabsorption redu-

ziert sich auf die von Ladenburg und Reiche berechnete Funktion, nur mit dem Unterschied, daß an die Stelle von  $\sigma$  bzw.  $\varrho$  jetzt  $\sigma_1 + \sigma_2$  bzw.  $\varrho_1 + \varrho_2$  zu setzen ist. Die von uns zugrunde gelegte Verteilung muß daher auch zum Grenzwert  $k = \sqrt{2}$  führen.

Bei ganz kleinen Helligkeiten ( $\frac{\sigma_2}{\nu^2} < 0,1$ ) braucht man in den Reihenentwicklungen nur das erste Glied zu berücksichtigen. In diesem Fall hat man nur drei Zusatzintegrale in  $Z_1$  und eins in  $Z_2$ . Von diesen Integralen verschwinden drei, weil von der Form  $K$ ; der Beitrag des übrig bleibenden zum Wert von  $A_L$  ist sicher  $< 0,05$ . Diese Resultate bleiben natürlich die gleichen, wenn man die Durchrechnung nicht nur auf ein Zusatzglied im Ausdruck von  $n\alpha$  beschränkt, sondern den allgemeinen Ansatz (vgl. S. 935) zugrunde legt. Ebenso, in der gleichen Weise wie die Linienabsorption  $A_L$ , kann man die Helligkeit  $J_L$  (vgl. S. 935) berechnen. Man kommt dann zu denselben Schlüssen und Folgerungen wie für die Größe  $A_L$ .

Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis: Die von uns angesetzte Funktion  $n\alpha$ , von der gezeigt worden war, daß sie die Verteilung im Bogen approximiert, führt für ganz kleine und große Helligkeiten zu dem gleichen Funktionsverlauf der Linienabsorption, wie er für eine ungestörte Dispersionsverteilung erhalten wird. Für kleine und mittlere Helligkeiten sind möglicherweise kleine Abweichungen von dieser Funktion zu erwarten. Man darf also im Bogen eine Funktion  $k = f(J)$  erwarten, die innerhalb der Fehlergrenze mit der von Ladenburg und Reiche berechneten zusammenfällt. Das aber ist es gerade, was experimentell in der vorliegenden Arbeit gefunden worden ist.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat König für die Überlassung der Institutsmittel und für wohlwollendes Interesse zu danken. Der Linde-Gesellschaft danke ich sehr für das kostenlos überlassene Argon und den Siemens-Planawerken gleichfalls für die Herstellung der Kohleelektroden.

Gießen, den 17. Februar 1930.

(Eingegangen 19. Februar 1930)

## ***Eine allgemeine Behandlung der Verstärkung und Gleichrichtung von Elektronenröhren<sup>1)</sup>***

**Von Nikolaus Vermes**

(Mit 5 Figuren)

### **I. Einleitung**

Zur Berechnung der Verstärkung von Elektronenröhren wird meistens die Formel von W. Schottky 9) und H. Barkhausen 10), 11), 12) benützt. Diese Formel bezieht sich auf einen Spezialfall und berücksichtigt nur die Anodenrückwirkung. In den grundlegenden Werken von H. Barkhausen 1) und H. G. Möller 2), sowie im Band 13 des *Handbuch der Experimentalphysik* 5) ist nur diese spezielle Formel aufzufinden. Allgemeinere Untersuchungen stammen von J. R. Carson 13), 14) und R. A. Heising 8). G. Breit 15) nahm das allgemeine Problem in Angriff, seine Berechnungen beziehen sich teilweise auf solche Schaltungen, die vom Gesichtspunkte der Wechselstromtechnik wichtig sind. Für den allgemeinsten Fall findet G. Breit eine komplizierte Formel, deren wirklich numerische Auswertung wohl sehr schwierig ist. Von G. Breit und E. O. Hulburt 16), 17) stammen auch experimentelle Untersuchungen über diese Frage. In den Arbeiten von W. Schottky und H. Barkhausen befinden sich auch spezielle Formeln für die Gleichrichtung. Gleicherweise beziehen sich die Untersuchungen von G. Breit auch auf den Gleichrichtungseffekt. Die Untersuchungen von Manfred v. Ardenne beziehen sich auf die Ausführung von Widerstand- und Endverstärker 18), 19) und auf die Anodengleichrichtung ohne Gitterwiderstand. 20) Eine Formel für die Gittergleichrichtung stammt von J. Groeneveld, Balth. v. d. Pol jr. und K. Posthumus 7), 21). Die

1) Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 3. Juni 1929 in einer erweiterten Ausführung.

Gleichrichtung sehr schwacher Schwingungen wurde von E. L. Chaffee und G. H. Browning untersucht 22).

Das Ziel dieser Untersuchung ist die Ableitung solcher allgemeiner Formeln für die Verstärkung und Gleichrichtung, die bei jeder Schaltung Gültigkeit haben, physikalisch leicht zu interpretieren sind und deren wirkliche numerische Auswertung leicht ist. Die Definition der Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren ist nun die folgende: Entsteht im Gitterkreise einer Elektronenröhre (durch Induktion usw.) eine elektromotorische Kraft  $dE_g$ , so wird dadurch die Spannung an der Anode um den Betrag  $de_a$  geändert. Sind diese Veränderungen genügend klein, dann kann  $de_a$  als eine quadratische Funktion von  $dE_g$  aufgefaßt werden:

$$(1) \quad de_a = c_1 \cdot dE_g + c_2 \cdot (dE_g)^2.$$

$c_1$  heißt *Verstärkungsfaktor* und  $c_2$  heißt *Gleichrichtungsfaktor*. Diese beiden Faktoren beziehen sich auf die Spannungsverstärkung. Es werden nun solche Formeln für  $c_1$  und  $c_2$  abgeleitet, in welchen die Konstanten der Elektronenröhre und der Schaltung enthalten sind; die Ableitung wird durchwegs mit einer geometrischen Darstellung begleitet werden.

## II. Theoretischer Teil

### 1. Ruhezustand der Elektronenröhre

Der Emissionsstrom einer gewöhnlichen Dreielektrodenröhre setzt sich aus dem Anodenstrom ( $i_a$ ) und Gitterstrom ( $i_g$ ) zusammen. Ein jeder von diesen ist eine Funktion der Gitter- und Anodenspannungen ( $e_g, e_a$ ):

$$(2a) \quad i_a = a(e_g, e_a),$$

$$(2b) \quad i_g = g(e_g, e_a).$$

$e_g$  und  $e_a$  sind Variable und bedeuten die auf dem Gitter und an der Anode auftretenden Spannungen. Die Funktionen (2a) und (2b) sind die *Anoden- bzw. Gittercharakteristikenfunktionen*, ihre graphischen Darstellungen im  $i_a - e_g - e_a$  bzw.  $i_g - e_g - e_a$  dreidimensionalen Koordinatensystemen ergeben die *charakteristischen Anoden- bzw. Gitterflächen*. Die durch die Wertetripel  $i_a - e_g - e_a$  bzw.  $i_g - e_g - e_a$  bestimmten Punkte sind die *Anoden- und Gitterarbeitspunkte*. Die ersten partialen

Differentialquotienten der Anodencharakteristikenfunktion haben die folgenden bekannten Namen:

$$(3a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial i_a}{\partial e_g} = S & \text{Steilheit,} \\ -\frac{\partial e_g}{\partial e_a} = D & \text{Durchgriff,} \\ \frac{\partial e_a}{\partial i_a} = R_{ia} & \text{innerer Widerstand.} \end{array} \right.$$

Bei den ersten partialen Differentialquotienten der Gittercharakteristikenfunktion führen wir analoge Bezeichnungen ein:

$$(3b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial i_g}{\partial e_g} = S_g & \text{Gitterstrom-Steilheit,} \\ -\frac{\partial e_g}{\partial e_a} = D_g & \text{Gitterdurchgriff,} \\ \frac{\partial e_a}{\partial i_g} = R_{ig} & \text{innerer Gitterwiderstand.} \end{array} \right.$$

Die Identität  $\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  ergibt für beide Elektroden den Barkhausenschen Zusammenhang:

$$(4a) \quad S D R_{ia} = 1,$$

$$(4b) \quad S_g D_g R_{ig} = 1.$$

Die zweiten partialen Ableitungen werden wir auch gebrauchen:

$$(3a) \quad \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g^2}, \quad \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g \partial e_a}, \quad \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_a^2},$$

$$(3b) \quad \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2}, \quad \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a}, \quad \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_a^2}.$$

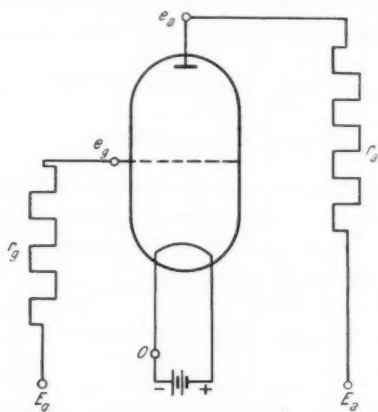
Alle diese ersten und zweiten Ableitungen sind Funktionen der Variablen  $e_g$  und  $e_a$ .

Die Anode der eingeschalteten Elektronenröhre ist durch einen Ohmschen Widerstand von  $r_a$  (äußerer Anodenwiderstand) mit dem positiven Pol der gleichbleibenden, konstanten Spannung  $E_a$  verbunden, während das Gitter durch  $r_g$  äußeren Gitterwiderstand zur Spannung  $E_g$  abgeleitet ist (Fig. 1). Die Spannungen  $E_a$  und  $E_g$  sind konstante Werte, auch wenn sich  $e_g$  und  $e_a$  ändern; sie bedeuten die elektromotorischen Kräfte der Anoden- und Gitterbatterie. Die Stromstärken in den beiden Kreisen werden durch das Ohmsche Gesetz bestimmt:

$$(5a) \quad i_a = \frac{E_a - e_a}{r_a},$$

$$(5b) \quad i_g = \frac{E_g - e_g}{r_g}.$$

Die graphische Darstellung von (5a) im Koordinatensysteme  $i_a - e_g - e_a$  ergibt eine Ebene, welche parallel mit der  $e_g$ -Achse läuft und die  $e_a$ -Achse in der Entfernung  $E_a$  vom Koordinatenursprung trifft; die Darstellung von (5b) im Systeme  $i_g - e_g - e_a$



Schema der Elektronenröhre

Fig. 1

ergibt eine mit der  $e_a$ -Achse parallele Ebene, welche die  $e_g$ -Achse in der Entfernung  $E_g$  durchschneidet. (5a) und (5b) beziehen sich auf die äußeren Stromwege, bei der Röhre selbst treten an die Stelle des Ohmschen Gesetzes die Zusammenhänge (2a) und (2b).

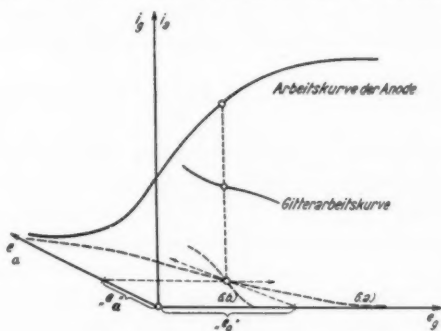
Der Anodenstrom muß zwei Bedingungen genügen, und zwar dem Ohmschen Gesetze (5a) und der charakteristischen Funktion (2a)

$$(6a) \quad \frac{E_a - e_a}{r_a} = a(e_g, e_a) = i_a.$$

Diese Gleichung bedeutet eine räumliche Kurve: die Schnittkurve der Anodencharakteristikenfläche und der Ebene des Ohmschen Gesetzes. Der durch den Wertetripel von  $i_a - e_g - e_a$

bestimmte Anodenarbeitspunkt muß auf dieser Schnittkurve bleiben. Diese Kurve heißt die *Arbeitskurve der Anode*, ihre Projektionen auf die Flächen des Koordinatensystems sind die *dynamischen Anodencharakteristiken*. Die Gleichung der auf der  $e_g - e_a$ -Ebene entstehenden Projektion ist durch die Gleichung (6a) gegeben.

Bei dem Gitter herrschen gleiche Verhältnisse. Der Gitter-Arbeitspunkt muß auf der Schnittlinie von der charakteristischen Fläche (2b) und der Ebene (5b) bleiben, die Projektionen dieser *Gitterarbeitskurve* heißen die *dynamischen Gitter-*



Das räumliche Diagramm der Arbeitskurven  
Fig. 2

charakteristiken. Die Gleichung der Projektion auf die Ebene  $e_g - e_a$  ist:

$$(6b) \quad \frac{E_g - e_g}{r_g} = g(e_g, e_a) = i_g.$$

Stellen wir die beiden Koordinatensysteme so ineinander, daß die Achsen  $i_g - i_a$ ,  $e_g - e_g$  und  $e_a - e_a$  zusammenfallen. Beim Betrieb der Elektronenröhre müssen die beiden Arbeitspunkte immer auf der dynamischen Anoden bzw. Gittercharakteristiken verbleiben, außerdem müssen die  $e_g$ -Koordinaten beider Arbeitspunkte gleich sein und die  $e_a$ -Koordinaten beider Arbeitspunkte müssen auch immer gleich sein, denn die Röhre hat ja nur eine Anode und ein Gitter. Diese Bedingungen werden nur dann erfüllt, wenn die beiden Arbeitspunkte in derselben, auf die  $e_g - e_a$ -Ebene senkrechten Geraden liegen.

Der Fußpunkt dieser senkrechten Geraden wird durch den Schnittpunkt der auf der  $e_g - e_a$ -Ebene liegenden dynamischen Anoden- und Gitterkennlinien bezeichnet (Fig. 2). Diese *Ruhewerte* der Anodenspannung und der Gitterspannung werden mit „ $e_g$ “ und „ $e_a$ “ bezeichnet, sie bedeuten die Lösungen des Gleichungssystems (6a) und (6b). Zu den Ruhewerten „ $e_g$ “ und „ $e_a$ “ gehörige Ruhewerte von  $i_a$  und  $i_g$ , also „ $i_a$ “ und „ $i_g$ “, sind aus (2) oder (5) zu berechnen.

*Die Gitter- und Anodenspannung, Gitter- und Anodenstrom der eingeschalteten Elektronenröhre stellen sich automatisch auf bestimmte „ $e_g$ “, „ $e_a$ “, „ $i_a$ “, „ $i_g$ “-Werte ein, die durch die Daten der Elektronenröhre und der äußeren Kreise bestimmt werden.*

## 2. Die Berechnung des Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktors

Die Werte von  $e_g$ ,  $e_a$ ,  $i_g$ ,  $i_a$  stellen sich beim Einschalten der Elektronenröhre binnen sehr kurzer Zeit auf die Ruhewerte „ $e_g$ “, „ $e_a$ “, „ $i_g$ “ und „ $i_a$ “ ein und behalten auch weiter diese Werte, wenn keine Erscheinung hervortritt. Entsteht aber im Gitterkreise eine elektrische Änderung, so ändern sich alle vier Betriebsdaten; von diesen Änderungen sind besonders jene beachtenswert, die sich auf den Anodenkreis beziehen. Entsteht im äußeren Gitterkreise durch induktive, kapazitive oder galvanische Art eine zusätzliche elektromotorische Kraft  $dE_g$ , so bedeutet dieses, daß der Gitterwiderstand  $r_g$  nicht zu der Spannung  $E_g$ , sondern zur Spannung  $E_g + dE_g$  geschaltet ist. Die durch (5b) bestimmte Fläche verschiebt sich und ergibt mit der charakteristischen Fläche (2b) eine neue Schnittkurve. Es verschiebt sich auch dadurch die Projektion dieser Kurve, die dynamische Gitterkennlinie (6b). Die neue dynamische Gitterkennlinie ergibt mit der alten dynamischen Anodenkennlinie einen neuen Schnittpunkt, wodurch die Werte von „ $e_g$ “, „ $e_a$ “, „ $i_g$ “, „ $i_a$ “ eine Änderung erfahren. Es ist nun unsere Aufgabe zu berechnen, *welche Änderung der Anodenspannung ( $d e_a$ ) eine gegebene zusätzliche elektromotorische Kraft  $d E_g$  hervorruft*, denn laut der Definition 1 ergibt dies die Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren. Bei der Berechnung werden die Differentialen erster und zweiter Ordnung berücksichtigt, die Differentialen höherer Ordnung aber vernachlässigt.



Die Gleichungen (6a) und (6b) sind nach Umformung:

$$(7a) \quad E_a = e_a + r_a \cdot a(e_g, e_a),$$

$$(7b) \quad E_g = e_g + r_g \cdot g(e_g, e_a).$$

$E_a$  behalten wir konstant,  $E_g$  erleidet aber eine Änderung um  $dE_g$ . Die Differentialen sind

$$0 = de_a + r_a \cdot da(e_g, e_a),$$

$$dE_g = de_g + r_g \cdot dg(e_g, e_a).$$

Durch Reihenentwicklung entsteht:

$$(8a) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= de_a + r_a \frac{\partial i_a}{\partial e_g} de_g + r_a \frac{\partial i_a}{\partial e_a} de_a + \frac{1}{2} r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g^2} (de_g)^2 \\ &\quad + r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g \partial e_a} de_g de_a + \frac{1}{2} r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_a^2} (de_a)^2; \end{aligned} \right.$$

$$(8b) \quad \left\{ \begin{aligned} dE_g &= de_g + r_g \frac{\partial i_g}{\partial e_g} de_g + r_g \frac{\partial i_g}{\partial e_a} de_a + \frac{1}{2} r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} (de_g)^2 \\ &\quad + r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a} de_g de_a + \frac{1}{2} r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_a^2} (de_a)^2. \end{aligned} \right.$$

Wir führen zur Vereinfachung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(9a) \quad \left\{ \begin{aligned} r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g^2} &= a_{11}, & r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_a^2} &= a_{22}; & r_a \frac{\partial i_a}{\partial e_g} &= a_{13}, \\ r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g \partial e_a} &= a_{12}, & 1 + r_g \frac{\partial i_a}{\partial e_a} &= a_{23}. \end{aligned} \right.$$

$$(9b) \quad \left\{ \begin{aligned} r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} &= g_{11}, & r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_a^2} &= g_{22}; & 1 + r_g \frac{\partial i_g}{\partial e_g} &= g_{13}, \\ r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a} &= g_{12}, & r_g \frac{\partial i_g}{\partial e_a} &= g_{23}, \\ & & -2dE_g &= g_{33}. \end{aligned} \right.$$

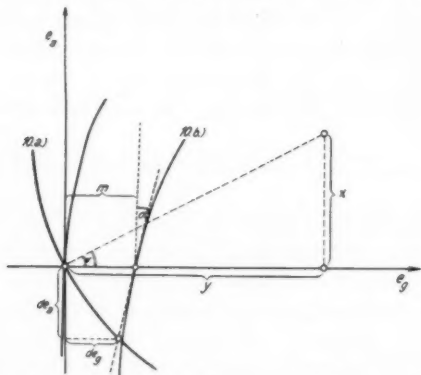
Es wird also aus den Gleichungen (8):

$$(10a) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11}(de_g)^2 + 2a_{12}de_g de_a + a_{22}(de_a)^2 + 2a_{13}de_g \\ + 2a_{23}de_a \end{aligned} \right. = 0,$$

$$(10b) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{11}(de_g)^2 + 2g_{12}de_g de_a + g_{22}(de_a)^2 + 2g_{13}de_g \\ + 2g_{23}de_a + g_{33} \end{aligned} \right. = 0.$$

(10a) ist die implizite Gleichung der dynamischen Anodenkennlinie, (10b) ist die implizite Gleichung der neuen dynamischen Gitterkennlinie. Beide Gleichungen bedeuten Annäherungen der dynamischen Kennlinien durch Kegelschnitte.

Eine Auflösung des Gleichungssystems (10) möchte  $de_a$  ergeben. Die Auflösung führt aber zu einer Gleichung vierten (bzw. dritten) Grades, die wirkliche Ausrechnung der Formel wäre also sehr mühsam und die physikalische Interpretation wäre schwierig.<sup>1)</sup> Zur Vereinfachung der Rechnung werden wir die dynamischen Charakteristiken statt die durch Gleichungen (10) bestimmten allgemeinen Kegelschnitten durch passend ge-



Die Projektionen der Arbeitskurven auf die  $e_y$ - $e_a$ -Ebene

Fig. 3

wählte spezielle Kegelschnitte annähern in der Umgebung des Arbeitspunktes.

Die *dynamische Anodenkennlinie* werden wir mit dem zu  $de_a = 0$  gehörigen *Krümmungskreis* annähern. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes seien  $X, Y$  (Fig. 3), der Neigungswinkel des Krümmungshalbmessers zur  $e_y$ -Achse sei  $\psi$ . Aus der impliciten Gleichung (10a) folgt durch die Formel der Differentialgeometrie für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$(11) \quad \begin{aligned} X &= \frac{a_{23} (a_{13}^2 + a_{23}^2)}{a_{13} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) + a_{23} (a_{12} a_{23} - a_{11} a_{23})}, \\ Y &= \frac{a_{13} (a_{13}^2 + a_{23}^2)}{a_{13} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) + a_{23} (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23})}. \end{aligned}$$

1) Anm. b. d. Korr. Hr. Prof. Dr. L. Fejér hat mich auf eine elegante Berechnungsweise aufmerksam gemacht, die ich bei späteren Arbeiten benützen möchte.

und für den Neigungswinkel:

$$(12) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{X}{Y} = \frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Die explizite Gleichung des Krümmungskreises ergibt sich zu:

$$(13a) \quad de_g = Y - \sqrt{Y^2 + 2Xde_a - (de_a)^2}.$$

Die *dynamische Gitterkennlinie* werden wir durch ihre zu  $de_a = 0$  gehörige *Tangente* ersetzen, die Krümmung der dynamischen Gitterkennlinie ist nämlich so gering, daß diese Annäherung zulässig ist. (Vgl. die Werte der zweiten partialen Gitterstromquotienten in Tab. 3 auf S. 957.) Die Gleichung der Tangente ergibt sich nach den Regeln der analytischen Geometrie zu:

$$(13b) \quad de_g = \operatorname{tg} \alpha \cdot de_a + m.$$

Hier bedeuten  $\alpha$  den Neigungswinkel und  $m$  die zu  $de_a = 0$  gehörige Ordinate der Tangente. Die Werte von  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $m$  sind nach binomialer Reihenentwicklung:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{g_{22}}{g_{12}} + \frac{g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23}}{2g_{13}^2} \cdot g_{33}, \\ m = -\frac{1}{2g_{13}} \cdot g_{33}. \end{array} \right.$$

Die Lösung des aus Gleichungen (13a) und (13b) bestehenden Systems ist nun eine leichte Aufgabe. Durch Elimination von  $de_g$  und Vernachlässigung von  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  neben 1 entsteht die folgende Gleichung für  $de_a$ :

$$(de_a)^2 - 2[(Y - m) \operatorname{tg} \alpha + X] \cdot de_a + [(Y - m)^2 - Y^2] = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach  $de_a$  ist:

$$de_a = (Y - m) \operatorname{tg} \alpha + X - \sqrt{[(Y - m) \operatorname{tg} \alpha + X]^2 + m(2Y - m)}.$$

Nach Einsetzung der Werte (14) für  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $m$  resultiert:

$$de_a = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}g_{33}$$

$$- \mathfrak{A} \sqrt{1 + \left[ \frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} - \frac{Y}{g_{13}\mathfrak{A}^2} \right] \cdot g_{33} + \left[ \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2} - \frac{Yg_{11}}{4g_{13}^3\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{4g_{13}^2\mathfrak{A}^2} \right] \cdot g_{33}^2},$$

wo  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  folgende Bedeutung haben:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = X - Y \frac{g_{22}}{g_{12}} \\ \mathfrak{B} = \frac{Y(g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23})}{2g_{13}^2} - \frac{g_{22}}{2g_{13}^2}. \end{array} \right.$$

Binomale Reihenentwicklung bis zum quadratischen Gliede und die Substitution  $g_{33} = -2dE_g$  laut (9b) führt dann zu der Formel:

$$de_a = \left[ \frac{-Y}{g_{13}\mathfrak{U}} \right] \cdot dE_g + \left[ \frac{1}{2g_{13}^2\mathfrak{U}} + \frac{Yg_{11}}{2g_{13}^3\mathfrak{U}} - \frac{2\mathfrak{B}^3}{\mathfrak{U}} + \frac{1}{2\mathfrak{U}} \right. \\ \left. \cdot \left( 2\mathfrak{B} - \frac{Y}{g_{13}\mathfrak{U}} \right)^2 \right] \cdot (dE_g)^2.$$

Wir haben also  $de_a$  als Funktion von  $dE_g$  errechnet, die Koeffizienten sind laut (1) die Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren  $c_1$  und  $c_2$ . Diese Faktoren müssen noch unter Zuhilfenahme von (3), (4), (12) und (15) umgeformt werden, damit die Konstanten der Elektronenröhre und der äußeren Kreise statt der vorübergehenden abkürzenden Bezeichnungen in den Formeln auftreten. Bei  $c_2$  führen wir, wo nur möglich, die Substitution  $c_1 = -\frac{Y}{g_{13}\mathfrak{U}}$  durch, denn das bringt eine große Vereinfachung mit sich und ist auch bei der Interpretation der Formel von Bedeutung. Als Resultate erhalten wir dann:

$$(16) \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_g}{R_{ig}} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \right)}, \\ c_2 = -\frac{c_1}{2Y} \left[ c_1^2 (1 + r_g S_g) + \frac{R_{ig} - 2c_1 r_g}{R_{ig} (1 + r_g S_g)} \right] \\ \quad + \frac{c_1}{2} \cdot \frac{r_g}{R_{ig}} \cdot \frac{2c_1 r_g - R_{ig}}{(1 + r_g S_g)^2} \cdot \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} - \frac{c_1^2 r_g}{1 + r_g S_g} \cdot \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a}, \end{cases}$$

wobei

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{Y} = -\frac{1}{S} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \right)^2} \\ \cdot \left[ \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g^2} - 2 \frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \cdot \frac{\partial^3 i_a}{\partial e_g \partial e_a} \right. \\ \quad \left. + \left( \frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \right)^2 \cdot \frac{\partial^3 i_a}{\partial e_a^3} \right]. \end{cases}$$

Man kann noch Vereinfachungen durch Vernachlässigung von  $\frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}}$  neben  $\frac{1}{D_g}$  und  $2c_1 \frac{r_g}{R_{ig}}$  neben 1 vornehmen und es bleibt dann für den Verstärkungsfaktor:

$$(18) \quad \boxed{c_1 = -\frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}} \cdot \frac{1}{1 + r_g S_g}}$$

und für den Gleichrichtungsfaktor:

$$(19) \quad c_2 = -\frac{c_1}{2Y} \cdot \left[ c_1^2 (1 + r_g S_g) + \frac{1}{1 + r_g S_g} \right] - \frac{c_1}{2} \cdot r_g \cdot \frac{1}{(1 + r_g S_g)^2} \\ \cdot \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} - \frac{c_1^2 r_g}{1 + r_g S_g} \cdot \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a}$$

der Wert von  $1/Y$  wird dabei durch (17) gegeben.

### 3. Die Besprechung des Resultates

Die Größe des Verstärkungsfaktors ist eine Funktion des Gitterwiderstandes, der Einfluß des Gitterwiderstandes ist bei großem  $r_g$  beträchtlich, bei  $r_g = 0$  geht die Formel (18) aber in die bekannte Schottky-Barkhausensche Formel 1), 2), 5) über:

$$c_1 = -\frac{1}{D} \cdot \frac{r_a}{r_a + R_{ia}}.$$

Das erste Glied des Gleichrichtungsfaktors bezieht sich auf die Anodengleichrichtung, die beiden anderen Glieder bedeuten die Gittergleichrichtung, denn im ersten Gliede treten die zweiten Differentialquotienten von  $i_a$  und in den beiden anderen diejenige von  $i_g$  auf. *Der Gleichrichtungsfaktor setzt sich aus diesen Gliedern additiv zusammen, Anoden- und Gittergleichrichtung verhalten sich also additiv.* Die Anodengleichrichtung ist mit  $1/Y$  proportional, wobei  $Y$  die Projektion des Krümmungshalbmessers der dynamischen Anodencharakteristik auf die  $e_g$ -Achse ist. Die Gittergleichrichtung wächst mit den zweiten partialen Differentialquotienten von  $i_g$ .

Wir wollen nun die Rolle dieser Faktoren bei der Hörbarmachung der modulierten Schwingung besprechen. Die zusätzliche elektromotorische Kraft  $dE_g$  soll eine niederfrequent modulierte Schwingung bedeuten:

$$(20) \quad dE_g = (d\eta + d\eta_0 \sin \Omega t) \sin \omega t,$$

$\Omega$  ist die Kreisfrequenz der niederfrequenten und  $\omega$  die Kreisfrequenz der hochfrequenten Schwingung,  $d\eta_0$  ist die Amplitude der modulierenden Schwingung und  $d\eta$  die Amplitude der unmodulierten hochfrequenten Schwingung. Die resultierende Änderung der Spannung an der Anode erhalten wir

durch Substitution von (20) in (1); nach E. L. Chaffee und G. H. Browning 22) erhalten wir für  $d e_a$ :

$$\begin{aligned}
 d e_a = & c_1 (d \eta + d \eta_0 \sin \Omega t) \sin \omega t \\
 & \text{(verstärkte ursprüngliche Schwingung)} \\
 & + c_2 \cdot d \eta \cdot d \eta_0 \cdot \sin \Omega t \quad \text{(Tonschwingung)} \\
 & + c_2 \left( \frac{d \eta^2}{2} + \frac{d \eta_0^2}{4} \right) \quad \text{(Konstante)} \\
 & + \frac{1}{4} c_2 \cdot d \eta_0^2 \cdot \sin (2 \Omega t - 90^\circ) \\
 & \quad \text{Oktave der Tonschwingung)} \\
 & + c_2 \left( \frac{d \eta^2}{2} + \frac{d \eta_0^2}{4} \right) \sin (2 \omega t - 90^\circ) \\
 & \quad \text{(Oktave der Trägerschwingung)} \\
 & + c_2 \cdot d \eta \cdot d \eta_0 \cdot \sin \Omega t \cdot \sin (2 \omega t - 90^\circ) \\
 & \quad \text{(dieselbe, moduliert durch die Tonschwingung)} \\
 & + \frac{1}{4} c_2 \cdot d \eta_0^2 \cdot \sin (2 \Omega t - 90^\circ) \cdot \sin (2 \omega t - 90^\circ). \\
 & \quad \text{(dieselbe, moduliert durch die Oktave der Tonschwingung).}
 \end{aligned}$$

Diese sieben Glieder entstehen ohne Vernachlässigungen auf Grund goniometrischer Identitäten. Das erste Glied ist die durch  $c_1$  multiplizierte ursprüngliche Schwingung (20), die Intensität der entstehenden Tonschwingung wird durch das zweite Glied bestimmt, außerdem entstehen noch verschiedene Oberschwingungen. Es liegt der Schluß nahe, daß die Tonschwingung allein vom Gleichrichtungsfaktor  $c_2$  abhängt, daß also zur Erreichung von großer Tonstärke nur der Gleichrichtungsfaktor zu vergrößern ist und der Verstärkungsfaktor jeglichen Einfluß auf die Tonstärke vermißt. Dies ist aber nicht so, denn nach Formel (19) ist  $c_1$  auch in  $c_2$  enthalten, und zwar hängt  $c_2$  in einer solchen Weise von  $c_1$  ab, daß bei größerem  $c_1$  auch  $c_2$  wächst und damit die Intensität des entstehenden Tones.

Die gegebene allgemeine Behandlung zeigt die Wesensgleichheit der Anoden- und Gittergleichrichtung, außerdem wird das gegenseitige Verhältnis der Verstärkung und der Gleichrichtung in das richtige Licht gerückt. In der Wirklichkeit funktionieren Gitter- und Anodenkreis gleichzeitig und gemeinsam und dürfen bei der theoretischen Behandlung nicht

getrennt werden. Diese gemeinsame Funktion wurde in dieser Abhandlung quantitativ behandelt.

Unsere Berechnungen beziehen sich auf reine Ohmsche Widerstände. Phasenverschiebungen können auch berücksichtigt werden, wenn Zylinderflächen mit elliptischem Querschnitt statt den Ebenen zur Darstellung des Ohmschen Gesetzes benutzt werden. Meistens liegen aber Resonanzfälle vor, wo die Phasenverschiebungen nicht zu berücksichtigen sind, selbstverständlich müssen dabei Wechselstromwiderstände benutzt werden. Diese räumlichen Darstellungen können auch bei der Einführung der Möllerschen Schwingungskennlinien 4), 23) benutzt werden.

### III. Experimenteller Teil

Der Zweck der experimentellen Untersuchungen war die Kontrollierung der Formel (18) und (19). Erstens würden die Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren nach Ausmessungen der Charakteristikenfelder *berechnet* (Abteilung I, S. 955). Zweitens wurden die durch bekannte elektromotorische Kräfte  $dE_g$  verursachten Anodenspannungsänderungen  $de_a$  gemessen und dadurch  $c_1$  und  $c_2$  *experimentell* bestimmt (Abteilung 2, S. 959). Die *Vergleichung* der Resultate entscheidet dann die Richtigkeit der Formel (Abteilung 3, S. 965).

#### 1. Die Berechnung der Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren

Die Ausmessung der Charakteristikenfelder geschah mittels der gewöhnlichen Anordnung. Die Konstanz der Heizung wurde durch die Stärke des Anodenstromes kontrolliert. Die benutzten Instrumente waren:

$I_a$  Siemens-Milliamperemeter, Nr. 49 763. 1 St. =  $10^{-4}$  A.

$I_g$  Hartmann & Braun-Mikroampèremeter, Nr. 1069. 1 St. =  $1,896 \cdot 10^{-8}$  A. (Oft mit Nebenschluß).

$V_a$  Siemens-Voltmeter, Nr. 49 762. 1 St. = 1 Volt.

$V_g$  Siemens & Halske-Voltmeter, Nr. 2 322 792.

1 St. = 0,05 Volt.

Es wurde nun das gesamte Charakteristikenfeld der Anode und des Gitters ausgemessen, es wurden also die Anoden- und

Gitterströme gemessen als Funktionen der Gitter- und Anodenspannung von  $e_g = -8$  Volt bis  $e_g = +8$  Volt und von  $e_a = +5$  Volt bis  $e_a = +95$  Volt. Gemessen wurde bei  $e_a$  in den Abständen von 5—10 Volt, bei  $e_g$  in den Abständen von 0,1—0,5 Volt. Zwei Elektronenröhren wurden untersucht, und zwar bei den folgenden Heizungen:

Philips B 406,  $e_h = 2,73$  Volt,  $i_h = 0,1118$  A.

Tungsrám G 402,  $e_h = 3,50$  Volt,  $i_h = 0,0791$  A.

Die benutzten Betriebsdaten sind bei den Aufschriften und Kopfleisten der Tab. 1—5 zu finden.

Die Spannungen  $E_g$  und  $E_a$  bedeuten die konstanten elektromotorischen Kräfte im Gitter- und Anodenkreise. Zuerst wurden die Ruhewerte der Gitter- und Anodenspannungen bei den gegebenen Daten der äußeren Kreise durch graphische Konstruktion ermittelt. Es wurden die dynamischen  $e_g - e_a$ -Anoden- und Gitterkennlinien (S. 947) aus den Daten der Charakteristikenfelder konstruiert, der Schnittpunkt dieser Kurven ergab die Ruhewerte „ $e_g$ “ und „ $e_a$ “. Diese Konstruktion wurde bei jeder Schaltung durchgeführt, die Ergebnisse sind in den Spalten 1 und 2 der Tab. 1—5 zu finden.

Die ersten partialen Differentialquotienten bei den „ $e_g$ “- und „ $e_a$ “-Werten wurden aus den Daten der Charakteristikenfelder durch sogenannte empirische Differentiation ermittelt mit der Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \left[ \frac{D_0 + D_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{D''_{-1} + D''_{-2}}{2} \right],$$

wo  $h$  das Intervall bedeutet, weiter

$$D_k = y_{k+1} - y_k,$$

$$D'_k = D_{k+1} - D_k,$$

$$D''_k = D'_{k+1} - D'_k.$$

Das Intervall  $h$  wurde möglichst klein gewählt.

Die ersten partialen Quotienten des Anodenstromes  $S_a$ ,  $R_{ia}$  und  $D$  sind bei den Tab. 1—5 in den Spalten 3, 4 und 5 verzeichnet. Die ersten partialen Quotienten des Gitterstromes  $S_g$ ,  $R_{ig}$  und  $D_g$  sind in den Tab. 2—4 in den Spalten 6, 7, 8 verzeichnet, bei den Tab. 1 und 5 waren sie nicht nötig.



Tabelle 1  
Philips B 406 $r_g = 0$ ;  $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 60,8$  Volt

$r_a$ $\Omega$	1 „ $e_g$ “ Volt	2 „ $e_a$ “ Volt	3 $S$ $\Omega^{-1}$	4 $R_{ia}$ $\Omega$	5 $D$ %
1 000	2,5	55,6	$2,8 \cdot 10^{-4}$	17380	20,60
5 000	2,5	38,8	$5,3 \cdot 10^{-4}$	8625	21,88
7 500	2,5	33,5	$5,8 \cdot 10^{-4}$	8770	19,68
10 000	2,5	27,9	$5,8 \cdot 10^{-4}$	8110	21,29
15 000	2,5	24,5	$6,6 \cdot 10^{-4}$	8405	18,02
20 000	2,5	20,5	$6,1 \cdot 10^{-4}$	8930	18,69

Tabelle 2  
Philips B 406 $r_g = 2,41 \cdot 10^6 \Omega$ ;  $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 60,8$  Volt

$r_a$ $\Omega$	1 „ $e_g$ “ Volt	2 „ $e_a$ “ Volt	3 $S$ $\Omega^{-1}$	4 $R_{ia}$ $\Omega$	5 $D$ %	6 $S_g$ $\Omega^{-1}$	7 $R_{ig}$ $\Omega$	8 $D_g$ %	9 $\text{tg}^2 \alpha$
1000	0,651	56,0	$5,9 \cdot 10^{-4}$	10940	15,52	$7,50 \cdot 10^{-6}$	$+7,51 \cdot 10^8$	0,018	$0,0004 \cdot 10^{-4}$
5000	0,648	41,3	$7,0 \cdot 10^{-4}$	8340	17,12	$6,13 \cdot 10^{-6}$	$+0,79 \cdot 10^8$	0,207	$-0,0428 \cdot 10^{-4}$
10000	0,648	34,8	$6,8 \cdot 10^{-4}$	8580	17,16	$8,11 \cdot 10^{-6}$	$-2,33 \cdot 10^8$	-0,053	$0,0168 \cdot 10^{-4}$
15000	0,647	28,0	$6,3 \cdot 10^{-4}$	9600	16,54	$8,30 \cdot 10^{-6}$	$+0,18 \cdot 10^8$	0,671	$0,4507 \cdot 10^{-4}$
20000	0,646	25,0	$5,3 \cdot 10^{-4}$	9620	19,67	$8,35 \cdot 10^{-6}$	$+0,41 \cdot 10^8$	0,292	$0,0853 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 3  
Philips B 406 $r_g = 2,41 \cdot 10^6 \Omega$ ;  $E_g = + 2,0$  Volt,  $E_a = 60,8$  Volt

$r_a$ $\Omega$	1 „ $e_g$ “ Volt	2 „ $e_a$ “ Volt	3 $S$ $\Omega^{-1}$	4 $R_{ia}$ $\Omega$	5 $D$ %	6 $S_g$ $\Omega^{-1}$	7 $R_{ig}$ $\Omega$
10 000	0,65	32,94	$6,75 \cdot 10^{-4}$	8 620	17,19	$8,05 \cdot 10^{-6}$	$-0,726 \cdot 10^8$
15 000	0,64	28,30	$6,20 \cdot 10^{-4}$	10 870	14,34	$8,15 \cdot 10^{-6}$	$+6,670 \cdot 10^8$
20 000	0,62	25,36	$5,22 \cdot 10^{-4}$	10 415	18,47	$7,27 \cdot 10^{-6}$	$-1,818 \cdot 10^8$

$r_a$ $\Omega$	8 $D_g$ %	9 $\frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2}$ Amp/Volt $^{-2}$	10 $\frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g \partial e_a}$ Amp/Volt $^{-2}$	11 $\frac{\partial^2 i_g}{\partial e_a^2}$ Amp/Volt $^{-2}$	12 $\text{tg}^2 \alpha$
10 000	-0,1711	$+5,93 \cdot 10^{-5}$	$-7,30 \cdot 10^{-8}$	$+2,66 \cdot 10^{-10}$	$0,0193 \cdot 10^{-4}$
15 000	+0,0184	$+5,65 \cdot 10^{-5}$	$+2,50 \cdot 10^{-8}$	$+2,70 \cdot 10^{-10}$	$0,0032 \cdot 10^{-4}$
20 000	-0,0756	$+6,21 \cdot 10^{-5}$	$+5,11 \cdot 10^{-8}$	$+2,66 \cdot 10^{-10}$	$0,0571 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4

Tungstam G 405

 $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 61,4$  Volt

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_g$ $\Omega$	$r_a$ $\Omega$	$\gamma \cdot 10^{14}$ Volt	$S$ $\Omega^{-1}$	$R_a$ $\Omega$	$D$ %	$S_g$ $\Omega^{-1}$	$R_{ig}$ $\Omega$	$D_g$ %	$\text{tg}^2 \alpha$
0	1000	2,5	$5,6 \cdot 10^{-4}$	16700	10,69	—	—	—	0
	5000	2,5	$5,2 \cdot 10^{-4}$	16130	11,92	—	—	—	0
	10000	2,5	$4,25 \cdot 10^{-4}$	18870	12,46	—	—	—	0
	15500	2,5	$3,41 \cdot 10^{-4}$	18870	15,59	—	—	—	0
$0,460 \cdot 10^8$	1000	0,8520	$5,15 \cdot 10^{-4}$	18350	10,58	$10,38 \cdot 10^{-6}$	$1,760 \cdot 10^8$	0,0550	$0,0029 \cdot 10^{-4}$
	4000	0,8555	$4,67 \cdot 10^{-4}$	17690	12,11	$10,42 \cdot 10^{-6}$	$2,475 \cdot 10^8$	0,0388	$0,0013 \cdot 10^{-4}$
	13000	0,8605	$4,20 \cdot 10^{-4}$	20430	11,65	$10,22 \cdot 10^{-6}$	$1,251 \cdot 10^8$	0,0781	$0,0060 \cdot 10^{-4}$
	16000	0,8630	$4,00 \cdot 10^{-4}$	22120	11,30	$10,09 \cdot 10^{-6}$	$1,908 \cdot 10^8$	0,0519	$0,0035 \cdot 10^{-4}$
$0,838 \cdot 10^8$	1000	0,7168	$4,92 \cdot 10^{-4}$	19030	11,27	$8,679 \cdot 10^{-6}$	$2,299 \cdot 10^8$	0,0501	$0,0025 \cdot 10^{-4}$
	5000	0,7190	$4,02 \cdot 10^{-4}$	19320	12,89	$9,195 \cdot 10^{-6}$	$2,062 \cdot 10^8$	0,0527	$0,0027 \cdot 10^{-4}$
	9000	0,7205	$3,92 \cdot 10^{-4}$	20610	12,38	$8,136 \cdot 10^{-6}$	$1,252 \cdot 10^8$	0,0982	$0,0095 \cdot 10^{-4}$
	24500	0,7238	$4,01 \cdot 10^{-4}$	24700	10,09	$8,006 \cdot 10^{-6}$	$3,281 \cdot 10^8$	—	$0,0013 \cdot 10^{-4}$
$2,703 \cdot 10^8$	1500	0,5190	$4,65 \cdot 10^{-4}$	18790	11,45	$5,290 \cdot 10^{-6}$	$1,984 \cdot 10^8$	0,0966	$0,0091 \cdot 10^{-4}$
	6000	0,5084	$5,02 \cdot 10^{-4}$	20080	9,92	$4,844 \cdot 10^{-6}$	$1,653 \cdot 10^8$	—	$0,0156 \cdot 10^{-4}$
	11000	0,5017	$3,91 \cdot 10^{-4}$	19880	12,87	$4,569 \cdot 10^{-6}$	$2,500 \cdot 10^8$	—	$0,0076 \cdot 10^{-4}$
	27000	0,4880	$3,36 \cdot 10^{-4}$	24170	12,30	$4,274 \cdot 10^{-6}$	$1,069 \cdot 10^8$	—	$0,0196 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5

Tungsram G 405

 $r_g = 0$ ;  $E_a = 61,1$  Volt

$r_a$ $\Omega$	$E_g$ Volt	1 „ $e_g$ “ Volt	2 „ $e_a$ “ Volt	3 $S$ $\Omega^{-1}$	4 $R_{ia}$ $\Omega$
2000	-1,5	-1,5	58,71	$3,60 \cdot 10^{-4}$	24390
	-2,8	-2,8	59,60	$2,35 \cdot 10^{-4}$	34010
7000	-1,6	-1,6	54,68	$3,40 \cdot 10^{-4}$	27090
	-2,0	-2,0	55,43	$2,90 \cdot 10^{-4}$	28210

$r_a$ $\Omega$	5 $D$ %	6 $\frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g^2}$ Amp/Volt <sup>-2</sup>	7 $\frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g \partial e_a}$ Amp/Volt <sup>-2</sup>	8 $\frac{\partial^2 i_a}{\partial e_a^2}$ Amp/Volt <sup>-2</sup>	9 $\text{tg}^2 \alpha$
2000	11,39	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$	$0,4 \cdot 10^{-6}$	0
	12,51	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	$0,9 \cdot 10^{-6}$	0
7000	10,86	$3,85 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	0
	12,22	$3,75 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	0

Die zweiten partialen Quotienten des Gitterstromes sind bei 3 in den Spalten 9, 10 und 11 und die zweiten Quotienten des Anodenstromes bei 5 in den Spalten 6, 7 und 8 bezeichnet. Bei den übrigen Tabellen waren die zweiten Quotienten verschwindend klein.

Unter Benutzung der angeführten Werte der partialen Quotienten wurden nun die Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren berechnet nach den verschiedenen Formeln. Über die Ergebnisse vgl. Tabb. 13—19.

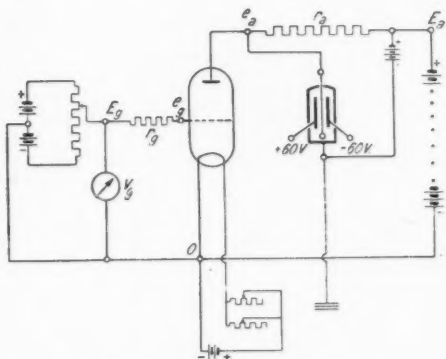
## 2. Die experimentelle Bestimmung der Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren

Die direkte experimentelle Bestimmung der Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren wurde folgenderweise ausgeführt. Es wurden bei jeder Schaltung im Gitterkreise verschiedene gemessene  $dE_g$  elektromotorische Kräfte eingeschaltet und die

dadurch entstehenden  $de_a$ -Anodenspannungsänderungen gemessen. Der Zusammenhang der  $dE_g$ - und  $de_a$ -Werte ergibt im allgemeinen eine gekrümmte Linie. Es wurden dann durch das Gauss'sche Verfahren mittels der kleinsten Fehlerquadrate die Werte von  $c_1$  und  $c_2$  berechnet, gegründet auf Gleichung (1):

$$(1) \quad de_a = c_1 \cdot dE_g + c_2 \cdot (dE_g)^2.$$

Die elektromotorische Kraft  $dE_g$  wurde von einem Spannungsteiler abgenommen und mittels Voltmeters  $V_g$  (S. 955)



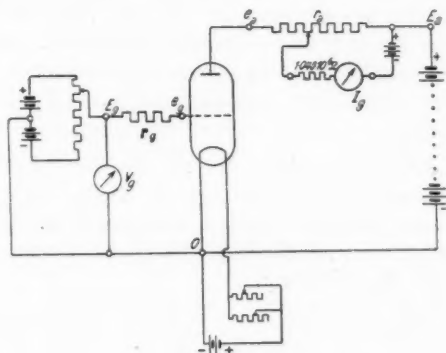
Meßanordnung mit Instrument  $\alpha$

Fig. 4

gemessen.  $de_a$  bedeutet eine kleine Änderung der großen Spannung „ $e_a$ “, deshalb mußte wegen Erhöhung der Pünktlichkeit der Spannungsabfall längs des äußeren Anodenwiderstandes ( $E_a - „e_a“$ ) kompensiert werden; dadurch rückte der Zeiger (oder Faden) des Spannungsmessers bei  $de_a = 0$  in die Nullpunktsnähe des Instrumentes und es konnte ein empfindliches Gerät benutzt werden. Zur Kompensation diente eine Akkumulatorenatterie, deren positiver Pol zum positiven Pol der Anodenbatterie geführt wurde (Figg. 4 und 5), mit dem negativen Pol der Kompensationsbatterie wurde das eine Ende des Spannungsmessers verbunden. Das andere Ende des Spannungsmessers führte zu einer beliebigen Abzweigung des Anoden-

widerstandes (Fig. 5), durch deren Wahl konnte die Kompensation noch vollständiger gemacht werden, natürlich war dann eine Umrechnung des beobachteten Spannungsabfalles auf den ganzen Anodenwiderstand notwendig.

Bei der Messung der Anodenspannungsänderung  $de_a$  konnte nur ein statisches Voltmeter oder eines von sehr hohem Widerstande verwendet werden, damit im äußeren Anodenwiderstande durch Einschalten des Instrumentes keine wahrnehmbare Veränderung des Widerstandes eintreten soll. Bei den Versuchen gelangten zwei Spannungsmesser zur Verwendung.



Meßanordnung mit Instrument  $\beta$   
Fig. 5

$\alpha$ ) Einfadenelektrometer Nr. 413 von Spindler & Hoyer, (bei Fig. 4). Dieses wurde mit  $\pm 60$  Volt Schneidenspannungen benutzt, wobei die maximale Empfindlichkeit etwa 0,02 Volt/St. betrug. Das Gehäuse war geerdet. Bei jeder neuen Einstellung wurde das Gerät neu kalibriert mittels Voltmeter  $V_g$  (S. 955).

$\beta$ ) Galvanometer Nr. 1069 von Hartmann & Braun, welches zur Messung des Gitterstromes diente ( $J_g$ , S. 955). Der innere Widerstand betrug 10140  $\Omega$ . Dieses Instrument wurde unter Vorschaltung eines Loewe-Vakuumsilites von  $1,040 \cdot 10^6 \Omega$  benutzt, dadurch entstand ein sehr empfindliches Voltmeter mit einem sehr großen Widerstande (etwa  $10^6 \Omega$ ), deren Leitfähig-

keit neben der Leitfähigkeit des Anodenwiderstandes vernachlässigt werden konnte. Das Instrument wurde zusammen mit dem Vorschaltwiderstande geeicht durch Voltmesser  $V_g$ , dadurch war die pünktliche Bestimmung des inneren Widerstandes überflüssig gemacht.

Die Aufschriften und Kopfleisten der Tab. 1—5 zeigen jene Werte des äußeren Gitter- und Anodenwiderstandes, bei denen die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  nach verschiedenen Formeln berechnet worden sind. Zu jedem Wertepaare der dort befindlichen Widerstände mußte nun eine Reihe zusammengehörende Werte von  $dE_g$  und  $de_a$  gemessen werden. Die äußeren Anodenwiderstände wurden aus einem Stöpselwiderstande Nr. 5865 der Land- & Seekabelwerke genommen. Als Gitterwiderstände wurden Loewe-Vakuumwiderstände benutzt, deren Größe mittels der Instrumente  $J_g$  und  $V_g$  (S. 955) gemessen wurde.

Die Tab. 6—8 zeigen die zu den verschiedenen  $dE_g$ -Werten gehörenden  $de_a$ -Werte bei der Röhre Philips B 406. Die Messungen erfolgten mit dem Instrumente  $\alpha$ . Die Tab. 9 bis 12 beziehen sich auf die Röhre Tungstam G 405, gemessen wurde mit der Anordnung  $\beta$ .

Tabelle 6

Philips B 406

 $r_g = 0$ ;  $E_g = +2,5$  Volt,  $E_a = 60,8$  Volt

$r_a \Omega$	1000	5000	7500	10000	15000	10000
$dE_g$ Volt	$de_a$ Volt					
-2,0	—	—	—	—	+6,9473	—
-1,75	—	—	—	—	+6,0834	+7,4752
-1,5	—	—	—	—	+5,1334	+6,5501
-1,25	—	—	—	—	+4,3334	+5,4181
-1,0	+0,3336	+2,0681	+2,7455	+3,2148	+3,4834	+3,6415
-0,75	—	—	+1,9500	+2,4230	+2,5334	+2,2816
-0,5	+0,1670	+1,0166	+1,3429	+1,5000	+1,5834	+1,8081
-0,25	—	—	+0,6170	+0,6502	+0,7916	+1,1000
0	0	0	0	0	0	0
+0,25	—	—	-0,8000	-0,7437	-0,8715	-0,7848
+0,0	-0,1170	-1,0962	-1,5728	-1,5770	-1,7085	-1,7000

Tabelle 7

Philips B 406

$$r_g = 2,41 \cdot 10^6 \Omega; E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 60,8 \text{ Volt}$$

$r_a \Omega$	1000	5000	10000	15000	20000
$d E_g \text{ Volt}$	$d e_a \text{ Volt}$				
-2,0	+0,0833	+0,6955	+0,9285	+1,0000	+1,1668
-1,5	+0,0021	+0,2917	+0,4285	+0,4583	+0,5418
-1,0	+0,0021	+0,2083	+0,1429	+0,2917	+0,2916
-0,5	—	+0,1247	+0,0714	+0,1250	+0,1280
0	0	0	0	0	0
+0,5	-0,0021	-0,0833	-0,1545	-0,0833	-0,0832

Tabelle 8

Philips B 406

$$r_g = 2,41 \cdot 10^6 \Omega; E_g = + 2,0 \text{ Volt}, E_a = 60,8 \text{ Volt}$$

$r_a \Omega$	10000	15000	20000
$d E_g \text{ Volt}$	$d e_a \text{ Volt}$		
-1,0	+0,3571	+0,3333	+0,4138
-0,5	+0,0715	+0,1666	+0,1636
0	0	0	0
+0,5	-0,0714	-0,1250	-0,1280
+1,0	-0,2259	-0,2083	-0,2112

Tabelle 9

Tungsram G 405

$$E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 61,4 \text{ Volt}$$

$r_g \Omega$	0	$0,460 \cdot 10^6$		$0,838 \cdot 10^6$	$2,703 \cdot 10^6$		
$r_a \Omega$	1000	1000	4000	1000	1500	6000	11000
$d E_g \text{ Volt}$	$d e_a \text{ Volt}$						
-1,0	—	—	—	+0,0684	+0,0573	+0,1932	+0,2478
-0,75	—	+0,0764	+0,2274	+0,0503	+0,0362	+0,1450	+0,1770
-0,5	+0,2818	+0,0503	+0,1469	+0,0301	+0,0242	+0,1014	+0,1151
-0,25	+0,1408	+0,0282	+0,0724	+0,0141	+0,0090	+0,0532	+0,0531
0	0	0	0	0	0	0	0
+0,25	-0,1408	-0,0342	-0,0724	-0,0121	-0,0092	-0,0313	-0,0531
+0,5	-0,2616	-0,0584	-0,1388	-0,0302	-0,0242	-0,0580	-0,1019

Tabelle 10

Tungsram G 405

 $r_g = 0$ ;  $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 61,4$  Volt

$r_a \Omega$	5000	10000	15500
$d E_g$ Volt	$d e_a$ Volt		
-0,4	—	+1,3118	—
-0,3	+0,6414	+0,9578	—
-0,2	+0,4225	+0,6600	—
-0,15	—	—	+0,5955
-0,1	+0,2264	+0,3380	+0,3983
-0,05	—	—	+0,2072
0	0	0	0
+0,05	—	—	-0,2053
+0,1	-0,2138	-0,2978	-0,3944
+0,15	—	—	-0,5554
+0,2	-0,4125	—	—
+0,25	—	-0,7444	—
+0,3	-0,5860	—	—

Tabelle 11

Tungsram G 405

 $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 61,4$  Volt

$r_g \Omega$	$0,460 \cdot 10^6$		$0,838 \cdot 10^6$			$2,703 \cdot 10^6$
$r_a \Omega$	13000	16000	5000	9000	24500	27000
$d E_g$ Volt	$d e_a$ Volt					
-1,0	—	—	+0,1943	+0,3822	+0,5693	+0,3721
-0,75	—	—	+0,1442	+0,2816	+0,4338	+0,2662
-0,5	+0,3164	+0,3513	+0,0938	+0,1810	+0,2908	+0,1712
-0,4	+0,2564	+0,2781	+0,0737	+0,1408	+0,2292	+0,1331
-0,3	+0,1936	+0,2049	+0,0603	+0,1026	+0,1774	+0,0977
-0,2	+0,1256	+0,1347	+0,0402	+0,0684	+0,1158	+0,0679
-0,1	+0,0654	+0,0644	+0,0233	+0,0321	+0,0566	+0,0354
0	0	0	0	0	0	0
+0,1	-0,0576	-0,0643	-0,0235	-0,0363	-0,0543	-0,0325
+0,2	-0,1204	-0,1375	-0,0370	-0,0745	-0,1134	-0,0625
+0,3	-0,1752	-0,2019	-0,0537	-0,1067	-0,1677	-0,0977
+0,4	-0,2302	-0,2604	-0,0738	-0,1389	-0,2218	-0,1222
+0,5	-0,2877	-0,3248	-0,0940	-0,1751	-0,2712	-0,1521



Tabelle 12  
Tungsram G 405  
 $r_g = 0$ ;  $E_a = 61,1$  Volt

$r_a \Omega$	2000		7000	
$E_g$ Volt	-1,5	-2,8	-1,6	-2,0
$d E_g$ Volt	$d e_a$ Volt			
-0,2	+0,1570	+0,0925	+0,3076	+0,3320
-0,1	+0,0805	+0,0483	+0,1737	+0,1851
0	0	0	0	0
+0,1	-0,0965	-0,0523	-0,2042	-0,1951
+0,2	-0,1690	-0,1107	-0,4084	-0,4204

Bei jeder Reihe der  $d e_a$ -Werte wurden dann die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  mittels der Gauss'schen Ausgleichsverfahren ermittelt. Diese Werte, also die *experimentell bestimmten Konstanten*  $c_1$  und  $c_2$  sind bei den Tabb. 13—17 und 19 in den Spalten C und bei Tab. 18 in der Spalte D aufgezeichnet.

### 3. Vergleichung der Resultate der Berechnungen und der Versuche

Die Tabb. 13—17 beziehen sich auf die *Verstärkung*. In den Spalten A sind die aus der speziellen Formel 1), 2), 5) (S. 953) berechneten Werte angeführt, in den Spalten B sind die aus der allgemeinen Formel (18) (S. 952) berechneten Werte aufgezeichnet. Die Kolumnen C enthalten die experimentell bestimmten Verstärkungsfaktoren.

Tabelle 13  
Philips B 406  
 $E_g = + 2,5$  Volt,  $E_a = 60,8$  Volt

$r_g \Omega$	0			$2,41 \cdot 10^6$		
$r_a$	$c_1$					
$\Omega$	A	B	C	A	B	C
1000	-0,27	-0,27	-0,28	-0,54	-0,028	-0,034
5000	-1,68	-1,68	-2,03	-2,19	-0,139	-0,166
7500	-2,35	-2,35	-2,48	—	—	—
10000	-2,60	-2,60	-2,60	-3,14	-0,153	-0,143
15000	-3,56	-3,56	-3,47	-3,69	-0,176	-0,208
20000	-3,71	-3,71	-3,64	-3,44	-0,163	-0,141

Tabelle 14

Tungsram G 405

$$r_g = 0; E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 61,4 \text{ Volt}$$

$r_a$ $\Omega$	$c_1$		
	A	B	C
1000	-0,528	-0,528	-0,563
5000	-1,987	-1,987	-2,066
10000	-2,777	-2,777	-3,109
15000	-4,509	-4,509	-4,125

Tabelle 15

Tungsram G 405

$$r_g = 0,460 \cdot 10^6 \Omega; E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 61,4 \text{ Volt}$$

$r_a$ $\Omega$	$c_1$		
	A	B	C
1000	-0,540	-0,0935	-0,1138
4000	-1,523	-0,2629	-0,2776
13000	-3,337	-0,5853	-0,5914
16000	-3,713	-0,6582	-0,6704

Tabelle 16

Tungsram G 405

$$r_g = 0,838 \cdot 10^6 \Omega; E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 61,4 \text{ Volt}$$

$r_a$ $\Omega$	$c_1$		
	A	B	C
1000	-0,4425	-0,0535	-0,0564
5000	-1,5951	-0,2070	-0,1971
9000	-2,4550	-0,3140	-0,3561
24500	-4,9347	-0,6401	-0,5671

Tabelle 17

Tungsram G 405

$$r_g = 2,703 \cdot 10^6 \Omega; E_g = + 2,5 \text{ Volt}, E_a = 61,4 \text{ Volt}$$

$r_a$ $\Omega$	$c_1$		
	A	B	C
1500	-0,6459	-0,0427	-0,0424
6000	-2,3190	-0,1645	-0,1690
11000	-2,7703	-0,2075	-0,2124
27000	-4,2888	-0,3417	-0,3257

Die Zahlen zeigen, daß bei  $r_g = 0$ , wo beide Formeln gleiche Werte geben, auch die Versuche diese Werte liefern. Bei größeren Gitterwiderständen bleibt aber nur die neue Formel (18) mit den Versuchen im Einklang.

Die Tab. 18 bezieht sich auf die *Gittergleichrichtung* und Tab. 19 auf die *Anodengleichrichtung*.

Tabelle 18

Philips B 406

$$r_g = 2,41 \cdot 10^4 \Omega; E_g = + 2,0 \text{ Volt}, E_a = 60,8 \text{ Volt}$$

$r_a$ $\Omega$	$c_2 \text{ Volt}^{-1}$			
	A	B	C	D
10000	142,9	7,01	0,0263	0,0617
15000	136,2	6,60	0,0297	0,0637
20000	149,4	8,08	0,0671	0,0993

Tabelle 19

Tungsram G 405

$$r_g = 0; E_a = 61,1 \text{ Volt}$$

$r_a \Omega$	$E_g \text{ Volt}$	$c_2 \text{ Volt}^{-1}$		
		A	B	C
2000	-1,5	-0,0080	-0,1477	-0,1798
	-2,8	-0,0018	-0,1148	-0,2156
7000	-1,6	-0,028	-1,0318	-1,2181
	-2,0	-0,063	-0,9803	-1,0212

Bei Tab. 18 sind in Spalte A die mit der speziellen Schottky-Barkhausenschen Formel  $c_2 = r_g \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} \text{ 3)}$  berechneten Werte aufgezeichnet. Die Spalte B zeigt die nach der verbesserten Groeneveld-Pol-Posthumusschen Formel

$$c_2 = r_g \cdot \frac{\partial^2 i_g}{\partial e_g^2} \cdot \frac{1}{1 + r_g S_g} \text{ 7, 21)}$$

erhaltene Resultate. Die nach der neuen Formel (19) (S. 953) berechneten Daten sind in der Kolumne C und die experimentell gefundenen Werte in der Spalte D zu sehen. Bei Tab. 19 sind die Zahlen der speziellen Formel  $c_2 = -r_a \frac{\partial^2 i_a}{\partial e_g \partial e_a} \text{ 6)}$  in der Spalte A, jene der neuen Formel (19) bei B und die

Experimentaldaten bei C verzeichnet. Die Zahlen beider Tabellen zeigen, daß auch bei den Gleichrichtungskoeffizienten die neue Formel (19) mit den experimentell gefundenen Werten am besten übereinstimmt.

*Die Genauigkeit der Experimente.* Die Genauigkeit der berechneten Werte von  $c_1$  und  $c_2$  ist durch die Genauigkeit der partiellen Quotienten gegeben. Bei den ersten partialen Quotienten des Anodenstromes kann man 0,01 mA und bei den ersten partialen Quotienten des Gitterstromes  $2 \cdot 10^{-9}$  Amp. als Ablesungsfehler annehmen. Das bedeutet bei den Quotienten einen relativen Fehler von 5—8 Proz. Im Ausdrucke des Verstärkungsfaktors sind drei Quotienten wichtig, der wahrscheinliche relative Fehler der berechneten Verstärkungsfaktoren beträgt also 10—14 Proz. Die Ablesungsfehler bei der experimentalen Bestimmung von  $c_1$  können bei der Abmessung von  $dE_g$  auf 0,01 Volt veranschlagt werden, was einen relativen Fehler von 2 Proz. bedeutet. Bei der Messung von  $de_a$  ist neben der 50 Skalenteile ein Ablesungsfehler von 0,1 Skalenteilen der Fehler nur 0,2 Proz. Der Fehler der experimentalen Bestimmung von  $c_1$  beträgt etwa 2—3 Proz. Die Summe der wahrscheinlichen Fehler des auf zwei Wegen bestimmten Verstärkungsfaktors beträgt also 12—17 Proz. Die mittlere Abweichung der Zahlen in den Spalten C von denen in den Spalten B bei den Tab. 13—17 beträgt 9,7 Proz., die Abweichungen bleiben demnach unter der Fehlergrenze.

Bei dem Gleichrichtungsfaktor liegen die Verhältnisse ungünstiger, denn bei den zweiten partialen Quotienten war eine neue Differenzenbildung der Differenzen nötig, wodurch die Fehler der berechneten  $c_2$ -Werte auch die Größe von 40 bis 50 Proz. erreichen können. Dennoch zeigen die Zahlen, daß die Formel (19) die beobachteten  $c_2$ -Werte viel besser wiedergeben kann, als die gewöhnliche spezielle Formel.

*Die Vergleichung der berechneten und durch Versuche bestimmten Daten zeigt also, daß die hier gegebene Formel (18) und (19) mit den Erfahrungstatsachen durchweg im Einklange stehen.*

#### IV. Zusammenfassung

Zweck dieser Untersuchungen war die allgemeine Behandlung der Verstärkung und Gleichrichtung. Eine räum-

liche graphische Darstellung der Verhältnisse wurde als Leitfaden bei der Ableitung benutzt.

Die Betriebsdaten der eingeschalteten Elektronenröhre stellen sich auf bestimmte Ruhewerte ein. Wenn im Gitterkreise eine zusätzliche elektromotorische Kraft  $dE_g$  entsteht, so stellen sich die Betriebsdaten auf neue Ruhewerte ein. Die Veränderung der Anodenspannung  $de_a$  erhalten wir als eine quadratische Funktion von  $dE_g$ ; der Koeffizient des linearen Gliedes ist der Verstärkungsfaktor und jenes vom quadratischen Gliede der Gleichrichtungsfaktor. In den Formeln dieser Faktoren treten die Daten der Röhre und der äußeren Kreise auf. Durch die gegebene Formel wird das Verhältnis der Verstärkung und Gleichrichtung geklärt, es wird außerdem gezeigt, daß die beiden Arten der Gleichrichtung sich additiv verhalten. Für die Verstärkungs- und Gleichrichtungsfaktoren werden allgemeine Formeln erhalten, aus denen auch die längst bekannten Spezialfälle ableitbar sind.

Die Formeln wurden auch durch Versuchsreihen kontrolliert. Zuerst wurden nach Ausmessung der Charakteristikenfelder die beiden Faktoren nach verschiedenen Formeln berechnet. Dann erfolgte eine direkte Messung dieser Faktoren durch statische oder sehr hochohmige Spannungsmesser. Die Versuchsdaten zeigen die Richtigkeit der abgeleiteten neuen Formel. Die hier benutzte Darstellungsweise könnte auch bei weiteren Problemen der Elektronenröhren benutzt werden.

Die mitgeteilten Versuche wurden im *Praktischen Physikalischen Institute der Universität in Budapest* ausgeführt. Es sei mir gestattet, dem Vorsteher dieses Institutes, Hrn. Prof. Dr. Stephan Rybár, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für seine gütigen Ratschläge, liebevolles Interesse und vielseitige Hilfe, wodurch die Ausführung dieser Untersuchung mir ermöglicht wurde. Außerdem danke ich Hrn. Privatdozenten Dr. Elemér Császár für seine gütige Mithilfe.

#### Literaturverzeichnis

- 1) H. Barkhausen, Die Elektronenröhren, Leipzig, 1923. S. 86.
- 2) H. G. Möller, Die Elektronenröhren und ihre techn. Anwendungen, Braunschweig, 1920. S. 38.

- 3) H. G. Möller, Die Elektronenröhren und ihre techn. Anwendungen, Braunschweig, 1920. S. 130.
- 4) H. G. Möller, Die Elektronenröhren und ihre techn. Anwendungen, Braunschweig, 1920. S. 59.
- 5) Handb. d. Experimentalphysik Bd. 13. II. Teil. S. 381.
- 6) Handb. d. Experimentalphysik Bd. 13. II. Teil. S. 469.
- 7) Handb. d. Experimentalphysik Bd. 13. II. Teil. S. 474.
- 8) R. A. Heising, Phys. Rev. **16**. 216. 1920.
- 9) W. Schottky, Archiv f. Elektrotechnik **8**. S. 1. 1919.
- 10) H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **14**. S. 27. 1919.
- 11) H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **16**. S. 82. 1920.
- 12) H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **18**. S. 402. 1921.
- 13) J. R. Carson, Proc. of the Inst. of Radio Eng. 1914. April 7.
- 14) J. R. Carson, Proc. of the Inst. of Radio Eng. **9**. S. 243. 1921.
- 15) G. Breit, Phys. Rev. **16**. S. 387. 1920.
- 16) E. O. Hulburt u. G. Breit, Phys. Rev. **16**. S. 274. 1921.
- 17) E. O. Hulburt u. G. Breit, Phys. Rev. **16**. S. 408. 1920.
- 18) M. v. Ardenne, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **27**. S. 50. 1926.
- 19) M. v. Ardenne, Proc. of the Inst. of Radio Eng. **16**. S. 193. 1928.
- 20) M. v. Ardenne, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **29**. S. 82. 1927.
- 21) J. Groeneveld, Balth. v. d. Pol jr. und K. Posthumus, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **29**. S. 139. 1927.
- 22) E. L. Chaffee u. G. H. Browning, Proc. of the Inst. of Radio Eng. **15**. S. 113. 1927.
- 23) H. G. Möller, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **14**. S. 326. 1919.

(Eingegangen 20. Februar 1930)

## Über die Bandensysteme der Alkalidämpfe

Von W. Weizel und M. Kulp

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Rostock)

(Mit 2 Figuren)

Inhalt: Eine Reihe von Bandkanten der Moleküle  $\text{Na}_2$ ,  $\text{K}_2$ ,  $\text{NaK}$ ,  $\text{NaCs}$ ,  $\text{LiK}$ ,  $\text{LiRb}$ ,  $\text{LiCs}$  und  $\text{NaRb}$  werden in Kantenschemen eingeordnet. Die Schwingungsquanten der Grundterme und oberen Terme können genähert ermittelt werden. Für die Deutung der Elektronenterme ergeben sich Gesichtspunkte. Die Terme des  $\text{Na}_2$  werden als Terme eines Leuchtelektrons gedeutet.

Von den Absorptionsspektren der Alkalidämpfe sind bis jetzt nur einige Bandensysteme im Rot und Grün untersucht. Von  $\text{Li}_2$  kennt man durch Untersuchungen von Wurm<sup>1)</sup> ein rotes und ein grünes Bandensystem. Von  $\text{Na}_2$  sind zwei ebensolche Bandensysteme durch Loomis und Wood<sup>2)</sup>, Fredrickson und Watson<sup>3)</sup> und durch Fredrickson<sup>4)</sup> analysiert worden. Von  $\text{K}_2$  ist ein rotes<sup>3)</sup> und ein ultrarotes<sup>5)</sup> System bekannt. Die Bandensysteme der drei Metalle sind sich völlig analog, das langwelligere ist jeweils ein  $\Sigma \rightarrow \Sigma$ -Übergang, das kurzwelligere ein  $\Sigma \rightarrow \Pi$ -Übergang. Der untere Term ist in allen Fällen der Grundterm des Moleküls, also ein gerader  $^1\Sigma$ -Term. Die Deutung dieser Bandensysteme ist in höchst einfacher Weise folgende:

- 
- 1) K. Wurm, Ztschr. f. Phys. **58**, S. 562. 1929; ebenda **59**, S. 35. 1929.
  - 2) F. W. Loomis und R. W. Wood, Phys. Rev. **32**, S. 223. 1928.
  - 3) W. R. Fredrickson u. W. W. Watson, Phys. Rev. **30**, S. 429. 1927.
  - 4) W. R. Fredrickson, Phys. Rev. **34**, S. 207. 1929.
  - 5) R. Ritschl u. D. Villars, Naturwiss. **16**, S. 219. 1928.

Li <sub>2</sub> rot	$A \leftrightarrow B$	$3p\sigma^1\Sigma \leftrightarrow 2s\sigma^1\Sigma$	← Absorption
Li <sub>2</sub> grün	$A \leftrightarrow C$	$2p\pi^1\Pi \leftrightarrow 2s\sigma^1\Sigma$	→ Emission
Na <sub>2</sub> rot	$A \leftrightarrow B$	$4p\sigma^1\Sigma \leftrightarrow 3s\sigma^1\Sigma$	
Na <sub>2</sub> grün	$A \leftrightarrow C$	$3p\pi^1\Pi \leftrightarrow 3s\sigma^1\Sigma$	
K <sub>2</sub> ultrarot	$A \leftrightarrow B$	$5p\sigma^1\Sigma \leftrightarrow 4s\sigma^1\Sigma$	
K <sub>2</sub> rot	$A \leftrightarrow C$	$4p\pi^1\Pi \leftrightarrow 4s\sigma^1\Sigma$	

Zur bequemen Kennzeichnung haben wir für die Bandensysteme die Abkürzungen  $A \leftrightarrow B$  und  $A \leftrightarrow C$  eingeführt.

Außer diesen Banden ist noch ein Bandensystem des NaK im Orange von Ritschl und Villars<sup>1)</sup> analysiert worden. Wir bezeichnen dieses System ebenfalls durch die Abkürzung  $A \leftrightarrow C$ , da wir vermuten, daß es noch weiter im Rot ein weiteres Bandensystem des NaK geben wird.

Von J. M. Walter und S. Barratt<sup>2)</sup> werden noch eine große Zahl von Bandkanten der Moleküle Na<sub>2</sub>, K<sub>2</sub>, Rb<sub>2</sub>, Cs<sub>2</sub>, LiK, LiRb, LiCs, NaK, NaRb hauptsächlich in kurzwelligeren Gebieten namhaft gemacht. Eine Einordnung dieser Banden wird von Walter und Barratt nicht versucht.

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, die Daten von Walter und Barratt zu verwerten, obwohl sie nicht sehr genau sind. Die Verfasser machen keine Angaben über die Genauigkeit ihrer Messungen und geben ihre Werte nur in ganzen ÅE an. Es ist daher anzunehmen, daß die Meßfehler bis zu 0,5 ÅE betragen. Bei den Kombinationsdifferenzen können dann Fehler bis zu 1 ÅE auftreten, ja in besonders ungünstigen Fällen wird man sogar noch mehr zulassen müssen. In cm<sup>-1</sup> ausgedrückt entspricht dies bei 4500 ÅE einer erlaubten Abweichung von 5 cm<sup>-1</sup>, bei 3500 ÅE von etwa 8 cm<sup>-1</sup>. Durch diese Ungenauigkeit verlieren natürlich die Kombinationsbeziehungen etwas an Beweiskraft und erlauben in manchen Fällen mehrere verschiedene Einordnungen. Andererseits lassen sich zuweilen die Intensitätsangaben zur Sicherung der Einordnung heranziehen. Eine gewisse Stütze findet die Einordnung der Banden auch durch Analogien mit den bereits geordneten Banden im Rot und Grün. Im großen und ganzen

1) R. Ritschl u. D. Villars, a. a. O.

2) J. M. Walter u. S. Barratt, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 119. S. 257. 1928.



dürften die im folgenden angegebenen Kantenschemen richtig sein. Jedenfalls sind die Schwingungsquanten sowohl der oberen wie auch der unteren Zustände richtig ermittelt. Doch ist es möglich, daß in Einzelfällen die Numerierung der Schwingungszustände noch um eine oder zwei Einheiten erhöht werden muß.

**Na<sub>2</sub>**

Von Na<sub>2</sub> geben Walter und Barratt eine große Liste von Bandkanten im Ultraviolett an, die wir bis auf ganz wenige Ausnahmen in fünf Bandensysteme einordnen konnten. In den folgenden Kantenschemen bedeutet  $v'$  die Schwingungsquantenzahl des oberen,  $v''$  die Schwingungsquantenzahl des unteren Terms. Die Differenzen nebeneinander- oder über-

Na<sub>2</sub>. System A  $\longleftrightarrow$  B'

$v' \backslash v''$	0	1	2	3	4
0			29 824 (117) (159)	29 941 (117) (161)	30 058 (171)
1		29 551 (148)	29 665 (114)	29 780 (115)	29 887 (107)
2	29 283 (154)	29 403 (120)			
3	29 129 (152)				
4	28 977 (150)				
5	28 827 (149)				
6	28 678 (155)				
7	28 523				

$v' \backslash v''$	0	1	2	3	4
0			2	8	3
1		8	6	6	1
2	8	8			
3	10				
4	10				
5	8				
6	4				
7	1				

einanderstehender Banden, die gleichzeitig die Schwingungsquanten sind, geben wir in Klammern an. Die Intensitäten sind in einem eigenen kleinen, analog dem Hauptschema gebauten Schema angegeben.

Das Schwingungsquant des unteren Terms  $A$  im System  $A \leftrightarrow B'$  ergibt sich zu  $158 \text{ cm}^{-1}$ , das des oberen Terms  $B'$  zu  $115 \text{ cm}^{-1}$ . Die reine Elektronenfrequenz des Bandensystems  $\nu_0$  (die Grundlinie) ergibt sich zu:  $\nu_0 = 29\,590 \text{ cm}^{-1}$ .

Na<sub>2</sub>. System  $A \leftrightarrow C'$ 

$\begin{smallmatrix} \nu' \\ \nu'' \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7
0	30 535 (103)	30 638 (103)	30 741 (95)	30 836 (105)	30 941 (96)	31 037 (153)	
1		30 479 (112)	30 591 (103)	30 694 (95)	30 789 (95)	30 884 (95)	30 979

$\begin{smallmatrix} \nu' \\ \nu'' \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7
0	2	4	4	1	1	1	
1		4	4	4	2	1	1

Na<sub>2</sub>. System  $A \leftrightarrow D$ 

$\begin{smallmatrix} \nu' \\ \nu'' \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4
0	31 329 (99)	31 428 (158)			
1	31 173 (97)	31 270 (89)	31 359 (157)		
2	31 018 (97)	31 115 (89)	31 202 (98)	31 300 (88)	31 388 (156)
3				31 144 (97)	31 241 (147)

$\begin{smallmatrix} \nu' \\ \nu'' \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4
0	2	1			
1	2	2	1		
2	1	1	2	2	1
3				1	2

Das System  $A \leftrightarrow C'$  konnte für  $v'' > 1$  nicht beobachtet werden, da die Banden durch die Serienlinie des Natriums bei  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  verdeckt sind. Als Mittelwert des Schwingungsquants des unteren Terms  $A$  ergibt sich  $151 \text{ cm}^{-1}$ , als Schwingungsquant des oberen Terms  $C'$  findet man etwa  $103 \text{ cm}^{-1}$ .  $\nu_0 = 30\,432$ . Das Schwingungsquant des unteren Terms  $A$  im System  $A \leftrightarrow D$  ist  $156 \text{ cm}^{-1}$ , das des oberen Terms  $D$  ist  $95 \text{ cm}^{-1}$ .  $\nu_0 = 31\,329 \text{ cm}^{-1}$ .

Der untere Term  $A$  des Systems  $A \leftrightarrow B''$  hat das Schwingungsquant  $156 \text{ cm}^{-1}$ , der obere Term  $B''$  das Schwingungsquant 117. Die  $v'' \rightarrow v' = 0 \rightarrow 3$ - und  $v'' \rightarrow v' = 1 \rightarrow 3$ -Banden können ebensogut in das folgende System  $A \leftrightarrow C''$  eingeordnet werden.  $\nu_0 = 33\,450$ .

Na<sub>1</sub>. System  $A \leftrightarrow B''$ 

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3
0			33 683 (114) (158)	33 797 (159)
1		33 413 (156)	33 525 (112)	33 638 (113)
2		33 257 (154)		
3	32 983 (152)	33 103 (120)		
4	32 831 (150)			
5	32 681 (149)			
6	32 532			

Na<sub>2</sub>-System  $A \leftrightarrow C''$ 

$v' \backslash v''$	0	1	2	3	4	5	6
0	33 900 (103) (160)	34 004 (104) (161)	34 108 (105)	34 213 (106)	34 319 (94)	34 413 (107)	34 520
1	33 740 (103)	33 843					

Das Schwingungsquant des unteren Terms  $A$  ist im System  $A \leftrightarrow C''$  160, das des oberen Terms  $C''$  106.  $\nu_0 = 33900$ .

Deutung der Na<sub>2</sub>-Banden

Die Intensitätsverteilung läßt sofort die deutliche Analogie der Systeme  $A \leftrightarrow C'$  und  $A \leftrightarrow C''$  wie auch  $A \leftrightarrow B'$  und  $A \leftrightarrow B''$  erkennen. Das Schwingungsquant des unteren Zustands kommt bei allen Bandensystemen gleich groß heraus, wie es ja auch bei Absorptionsbanden der Fall sein muß. Darin erblicken wir eine starke Stütze für die Richtigkeit der Einordnung. Natürlich muß dann das Schwingungsquant des unteren Zustands  $A$  auch identisch sein mit dem Schwingungsquant der roten und grünen Na<sub>2</sub>-Banden. Dies ist auch der Fall. Fredrickson und Watson geben für das Schwingungsquant des Grundzustands von Na<sub>2</sub> 157—158 cm<sup>-1</sup> an.

Die hier eingeordneten Banden lassen eine sehr einfache Deutung als höhere Serienglieder der roten und grünen Na<sub>2</sub>-Banden zu. Es sollen die Systeme  $A \rightarrow B'$  und  $A \rightarrow B''$  zu dem System  $A \rightarrow B$  (rote Banden) und die Systeme  $A \rightarrow C'$  und  $A \rightarrow C''$  zu dem System  $A \rightarrow C$  (grüne Banden) gehören. Die Terme  $C, C', C''$  bilden in erster Näherung eine Rydbergserie. Zur Berechnung der Terme ist es angezeigt, sie durch die Ritzsche Termformel darzustellen, da die Abweichungen von der Rydbergformel doch deutlich sind. Man errechnet dann folgende Termwerte:  $C'' = 5270$ ,  $C' = 8740$ ,  $C = 18870$ . Aus der Kombination  $A \leftrightarrow C'$  erhält man den Termwert für den Grundterm, und mit dessen Hilfe dann die  $B$ -Terme und den  $D$ -Term.

In der folgenden Tabelle sind die Termwerte der  $\text{Na}_2$ -Terme und die zugehörigen effektiven Quantenzahlen angegeben. Die 3. Spalte gibt dann die Deutung des Terms an, die 4. Spalte das Schwingungsquant. In der 5. Spalte ist dann der mutmaßliche Zustand der Na-Atome verzeichnet, in den der Term dissoziiert.

	Termwert	$n_{\text{eff}}$		$\nu_e$	
A	39 170	1,67	$3 s \sigma^1 \Sigma$	157	$3 s^1 S + 3 s^1 S$
B	24 160	2,13	$4 p \sigma^1 \Sigma$	116	$3 s^1 S + 3 p^1 P$
B'	10 580	3,22	$5 p \sigma^1 \Sigma$	115	$3 s^1 S + 4 p^1 P$
B''	5 720	4,37	$6 p \sigma^1 \Sigma$	117	$3 s^1 S + 5 p^1 P$
C	18 870	2,41	$3 p \pi^1 \Pi$	124	$3 s^1 S + 3 p^1 P$
C'	8 740	3,54	$4 p \pi^1 \Pi$	103	$3 s^1 S + 4 p^1 P$
C''	5 270	4,57	$5 p \pi^1 \Pi$	106	$3 s^1 S + 5 p^1 P$
D	7 840	3,74	$4 f \sigma_1 n^1 \Sigma \Pi$	95	$3 s^1 S + ?$

Die effektiven Quantenzahlen der Tabelle sind recht interessant. Sie zeigen das starke Tiefferrücken der zu  $p \sigma$ - und  $s \sigma$ -Elektronen gehörigen Terme, welches schon bei Wasserstoff- $\text{H}_2$  zu sehen ist und bei  $\text{He}_2$  seinen Fortgang nimmt. Auch bei den  $p \pi$ -Elektronen ist das Herabrücken schon bemerkbar. Leider ist die Lücke zwischen  $\text{He}_2$  und  $\text{Na}_2$  so groß, daß diese Erscheinung nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit studiert werden kann. Vor allem ist nicht feststellbar, ob nicht die Hauptquantenzahlen der  $p \sigma$ -Elektronen um Eins zu erhöhen wären.

### $\text{K}_2$

Von den Linien, die Walter und Barrett für  $\text{K}_2$  angeben, konnten wir einen Teil in das folgende Kantenschema  $A \leftrightarrow D$  bringen.

Von  $\text{K}_2$  waren schon oben ein ultrarotes und ein rotes Bandensystem erwähnt und ihre Elektronenterme gedeutet. Die Intensitätsverteilung dieses neuen Systems im Blau ist der des roten nicht unähnlich. Auch das Schwingungsquant des Grundzustandes ist in Übereinstimmung mit dem des roten Systems gleich 91; das des oberen Zustandes ist etwa 60. Da kurzwelligere Bandensysteme bei  $\text{K}_2$  nicht beobachtet sind, kann eine Deutung des Elektronenterms jedoch nicht versucht werden.

K<sub>2</sub>-System  $A \leftrightarrow D$ 

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0			23 083 (59)	23 142 (64)	23 206 (60)	23 266 (54)	23 320 (60)	23 380 (55)	23 435
1	22 872 (94)	22 929 (57)	22 993 (64)	23 051 (58)	23 115 (64)'	$\nu_0 = 22\,936\text{ cm}^{-1}$			
2	22 778 (88)	22 840 (62)	22 903 (63)						
3	22 690 (97)								
4	22 593								

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0			1	6	8	7	5	2	1
1	0	3	5	2	0				
2	1	4	1						
3	3								
4	2								

## NaK

Einen Teil der von Walter und Barratt angegebenen Bandkanten im Gebiet von 4014 bis 353 ÅE haben wir in folgendes Kantenschema  $A \leftrightarrow D$  eingeordnet.

Die Einordnung der Banden in dieses System ist nicht ganz eindeutig. Die beiden Bandkanten 26 089 und 25 967 haben wir aus diesem Grunde an zwei Stellen angeführt. Das Schwingungsquant des oberen Zustandes beträgt etwa 82, das des unteren etwa  $120\text{ cm}^{-1}$ . Letzterer Wert stimmt überein mit dem Grundschwingungsquant des roten NaK-Systems. Eine Deutung des Elektronenterms kann auch bei diesen Banden nicht versucht werden.

Aus den übrigen von Walter und Barratt angegebenen Bandkanten lassen sich noch mehrere Kantenfolgen herausfinden, die zu einem oder mehreren Systemen gehören. Da die Einordnung jedoch unsicher und vieldeutig ist, sei hier nur erwähnt, daß sich zwischen  $24\,906\text{ cm}^{-1}$  und  $25\,438\text{ cm}^{-1}$  9 Kanten in ein System mit den Schwingungsquanten  $120\text{ cm}^{-1}$

NaK System A  $\longrightarrow$  D

$\begin{smallmatrix} v' \\ v'' \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	26 089 (122)	26 164 (75) (123)	26 253 (89) (123)	26 329 (76) (117)	26 413 (94) (118)	26 490 (77)	26 574 (84) (119)	26 652 (78) (120)	26 738 (86) (121)	26 816 (78)
1	25 967 (121)	26 041 (74) (115)	26 130 (82) (123)	26 212 (82) (123)	26 295 (83)		26 455 (77)	26 532 (85)	26 617	
2	25 846 (120)	25 926 (80) (120)	26 007 (81) (114)	26 089 (82) (122)						
3	25 726 (125)	25 806 (80) (120)	25 893 (87) (127)	25 967 (74)						
4	25 601 (117)	25 686 (85) (117)	25 766 (80) (126)							
5	25 484 (110)		25 640							
6	25 374									

$\begin{smallmatrix} v' \\ v'' \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	1	1	1	1	1	0	0	1
1	2	1	2	1	1		2	2	1	
2	4	4	2	1						
3	10	8	2	2						
4	10	4	2							
5	8		4							
6	4									

und  $83 \text{ cm}^{-1}$ , und zwischen  $27\,747 \text{ cm}^{-1}$  und  $28\,257 \text{ cm}^{-1}$  10 Kanten in ein System mit den Schwingungsquanten 128 und  $63 \text{ cm}^{-1}$  einordnen ließen. Außer diesen Systemen ist noch ein System im Orange bekannt, welches von Ritschl und Villars<sup>1)</sup> eingeordnet wurde. Wir bezeichnen dieses System zum Unterschied von dem in dieser Arbeit behandelten mit A  $\longleftrightarrow$  C.

1) R. Ritschl u. D. Villars, a. a. O.

## NaCs

Von NaCs fanden Walter und Barratt Banden im Gelbgrün und im Violett. Die Kanten im Gelbgrünen fügten wir alle in ein System  $A \leftrightarrow D$  ein, bis auf die drei kurzwelligsten, die, auch schon nach der Intensität zu urteilen, sicherlich zu einem zweiten System gehören.

NaCs. System  $A \rightarrow D$ 

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5
0	18 233 (96)	18 300 (67) (97)	18 364 (64) (98)	18 428 (64)	18 493 (65)	18 555 (62)
1	18 137 (98)	18 203 (66) (95)	18 266 (63)			
2	18 039 (94)	18 108 (69)				
3	17 945 (99)					
4	17 846 (92)		17 974 (93)			
5	17 754 (66)	17 820 (101) (61)	17 881			
6		17 719 (93)				
7		17 626 (93)				
8		17 533 (92)				
9		17 441 (67)	17 508			

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5
0	3	10	10	10	2	0
1	7	10	3			
2	10	5				
3	10					
4	10		3			
5	10	1	3			
6		7				
7		5				
8		1				
9		1	1			



Das auffallende Fehlen der  $3 \rightarrow 1$ - und  $4 \rightarrow 1$ -Banden in diesem System hat wohl seinen Grund darin, daß diese Kanten dicht bei den sehr starken Banden 18 039 und 17 940 in deren Abschattierung nicht erkannt wurden. Grundzustand und angeregter Zustand haben die Schwingungsquanten  $96 \text{ cm}^{-1}$  und  $65 \text{ cm}^{-1}$ .

Die violetten NaCs-Banden gehören offenbar mehreren Systemen an. Das sicherste und stärkste von ihnen führen wir nachfolgend als  $A \leftrightarrow E$  an.

NaCs. System A  $\rightarrow$  E

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			24 371		24 509	24 563	24 618	24 666
			(101)		(54)	(55)	(48)	
1		24 212	24 270	24 336	24 395	24 461		
		(58)	(66)	(59)	(66)			
2		24 107	24 171	24 236				
		(105)	(99)	(100)				
3	23 951	24 014	24 078					
	(91)	(63)	(64)					
4	23 860	23 917						
	(102)	(57)	(97)					
5	23 758	23 820						
	(90)	(62)						
6	23 668							
	(101)							
7	23 567							

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			6		6	6	4	2
1		4	6	6	10	6		
2		4	10	6				
3	2	6	6					
4	4	6						
5	4	1						
6	4							
7	2							

Die Bandkante  $0 \rightarrow 3$  wird wahrscheinlich durch die starke Bande 24 461 verdeckt. Das Schwingungsquant  $97 \text{ cm}^{-1}$  stimmt mit dem des gelbgrünen Systems überein. Der obere Zustand hat das Schwingungsquant 62. Es läßt sich noch ein zweites System aufstellen. Da es sich aber auf mehrfache Weise ordnen läßt, sei es hier nicht angeführt. Es besteht aus 14 Banden zwischen 4034 und 3931 Å. Seine Schwingungsquanten sind 99 und  $47 \text{ cm}^{-1}$ . Bei keinem der NaCs-Systeme wurde der obere Elektronenterm gedeutet.

**LiK; LiRb; LiCs; NaRb**

Von den Lithiumverbindungen der schwereren Alkalimetalle und von Natriumrubidium geben Walter und Barratt ebenfalls einige Bandkanten an. Es ist schwer möglich, die wenigen Kanten ohne Willkür einzuordnen. Wir geben daher die Kanten selbst noch einmal an. Eine Einordnung haben

LiK	LiRb	LiCs	NaRb
17 122	17 192	15 983	18 404
17 328	17 302	16 080	18 524
17 465	17 407	16 177	18 624
17 539	17 500	16 266	18 725
17 669	17 588	16 346	18 753
17 788		16 432	
17 906		16 511	
18 112		16 582	

LiK. System  $A \rightarrow C$

$\begin{smallmatrix} b'' \\ v'' \end{smallmatrix}$				
	17 539	17 669	17 788	17 906
	(130)	(119)	(118)	
	(211)	(204)		
	17 328	17 465		
	(137)			
	(206)			
	17 122			

LiRb. System  $A \rightarrow C$

$\begin{smallmatrix} b'' \\ v'' \end{smallmatrix}$				
	17 500	17 588		
	(88)	(191)		
		17 407		
		(80)		
			(185)	
			17 302	
			(75)	
			(185)	
				17 192

LiCs. System  $A \rightarrow C$ 

$v''$			
	16 432	16 511	16 582
	(79)	(71)	
	(166)	(165)	
	16 266	16 346	
	(80)	(169)	
		16 177	

NaRb. System  $A \rightarrow C$ 

$v''$	$v'$				
			18 725		
			(101)		
			18 624		18 753
			(64)	(65)	
			(100)		
18 404			18 524		
(60)		(60)			

wir vor allem deshalb versucht, weil es uns verlockend erschien, für die Schwingungsquanten Gesetzmäßigkeiten zu finden. Selbst wenn an der Einordnung einige Änderungen vorgenommen werden müssen, wird dadurch die Größe der Schwingungsquanten nicht geändert.

Die Schwingungsquanten der Grundzustände sind für LiK 207  $\text{cm}^{-1}$ , für LiRb 185  $\text{cm}^{-1}$ , für LiCs 167  $\text{cm}^{-1}$  und für NaRb 100  $\text{cm}^{-1}$ . Die der oberen Zustände für LiK 126  $\text{cm}^{-1}$ , für LiRb 81  $\text{cm}^{-1}$ , für LiCs 77  $\text{cm}^{-1}$  und für NaRb 62  $\text{cm}^{-1}$ .

#### Vergleich der Schwingungsquanten der verschiedenen Moleküle

In den Figg. 1 und 2 sind die Schwingungsquanten einiger Zustände der Moleküle Li<sub>2</sub>, LiK, LiRb, LiCs (Fig. 1) und Na<sub>2</sub>, NaK, NaRb und NaCs (Fig. 2) eingetragen. Die oberen Kurven, mit  $A$  bezeichnet, stellen die Schwingungsquanten der Grundzustände dar, die unteren Kurven die Schwingungsquanten der mit  $C$  bezeichneten angeregten Zustände.<sup>1)</sup> Da die mit  $C$  bezeichneten Zustände der verschiedenen Moleküle vielleicht nicht alle vergleichbar sind, sind die  $C$ -Kurven etwas problematisch.

Rechnet man aber hinzu, daß bei den höheren Na<sub>2</sub>-Termen Schwingungsquanten stets in der gleichen Größe, etwa 100–110, gefunden worden sind, so werden die oberen Terme der anderen Moleküle sich auch nicht sehr unterscheiden. Insofern kann man auch den  $C$ -Kurven eine gewisse Bedeutung zumessen. Die  $A$ -Kurven zeigen deutlich den gesetzmäßigen Zusammen-

1) Die Werte für Li<sub>2</sub>, Na<sub>2</sub> und NaK sind den Arbeiten von K. Wurm, F. W. Loomis u. R. W. Wood und R. Ritschl u. D. Villars entnommen.

hang zwischen den Grundswingungsquanten der verschiedenen Moleküle. Die Schwingungsquanten nehmen mit der Schwere des Moleküls ab, doch ist die Abnahme am beträchtlichsten bei den leichteren Molekülen, besonders zwischen  $\text{Li}_2$  und  $\text{Na}_2$ . Von zwei Molekülen mit sehr ähnlichem Molekulargewicht, z. B.  $\text{Na}_2$  und  $\text{LiK}$ , beide mit den Molekulargewichten 46, zeigt das aus

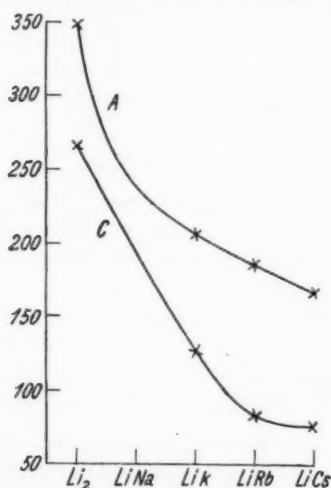


Fig. 1  
Schwingungsquanten der A- und C-Terme

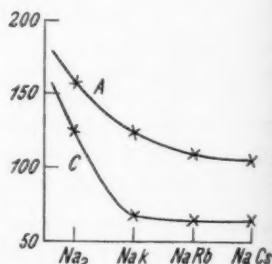


Fig. 2

verschiedenen Komponenten bestehende das höhere Schwingungsquant im Grundzustand.

Die Schwingungsquanten der oberen Zustände scheinen sich sehr rasch einem Grenzwert, der bei  $60-70 \text{ cm}^{-1}$  liegt, zu nähern, wenn man das Molekulargewicht vergrößert. Gleichgültig wodurch die Vergrößerung geschieht. Noch höhere Terme würden dies Zustreben zu einem Grenzwert für schwere Moleküle wahrscheinlich noch besser zeigen.

Leider lassen sich diese interessanten Verhältnisse nicht noch genauer diskutieren, da es an Beobachtungsmaterial fehlt.

(Eingegangen 27. Februar 1930)

